Taylors teorem

- La f være analytisk i et område D (ikke nødv.vis esh)
- La z_0 være et fastholdt punkt i D

Da gjelder:

A. $$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k + R_n(z) \quad \text{der}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \qquad R_n(z) = c_n (z-z_0)^{n+1}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}(\xi - z)}$$

og C er en enkel, lukket, s.g. kurve rundt z_0 der f er analytisk på og innenfor C

B. Taylorrekken $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ for $f(z)$ konvergerer mot $f(z)$ for $|z - z_0| < R$ der $R > 0$ er avstanden fra z_0 ut til nærmeste (problempunkt / singularitet) for $f(z)$.

Bevis for A: $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad \text{UTAG: } C \text{ sirkel om } z_0$$

Standardknep: $$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

der $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0} \right)^k + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \right\}$$

Bevis for B: $R_n(z) \to 0$ når $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$