TMA4120 Matematikk 4K høsten 2006

Ikke-tellende midtsemesterprove

Løsningsforslag

Oppgave 1: La

$$G(s) = \frac{2}{(s-1)(s^2+1)}\,.$$

Delbrøkoppspalting viser at

$$G(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Derfor er

$$g(t) = e^t - \cos t - \sin t$$

og

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t-\pi)u(t-\pi) = \{e^{t-\pi} - \cos(t-\pi) - \sin(t-\pi)\}u(t-\pi) \\ &= \{e^{t-\pi} + \cos t + \sin t\}u(t-\pi) = \begin{cases} 0 & \text{for } \ t < \pi \\ e^{t-\pi} + \cos t + \sin t & \text{for } \ t > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Oppgave 2a:

$$F_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-st} g(t)\,dt.$$

Substitusjonen $u = t - (n-1)\pi$ gir

$$F_n(s) = \int_0^\pi e^{-s(u+(n-1)\pi)} g(u + (n-1)\pi)\,du$$

der $g(u + (n-1)\pi) = g(u)$ fordi g er periodisk med periode π. Derfor er

$$F_n(s) = \int_0^\pi e^{-su} \cdot e^{-s(n-1)\pi} \cdot g(u)\,du$$

der faktoren $e^{-s(n-1)\pi}$ kan settes utenfor integralet. Vi skifter navn på integrasjonsvariabelen og får resultatet.

Oppgave 2b:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \\
G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\pi s} \int_0^{\pi} e^{-st} g(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Integralet er uavhengig av tellevariabelen n og kan settes utenfor summetegnet. Videre er $e^{-(n-1)\pi s} = (e^{-\pi s})^{n-1}$ der $e^{-\pi s} < 1$ for $s > 0$, slik at

$$
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\pi s} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi s})^{n-1} = \frac{(e^{-\pi s})^0}{1 - e^{-\pi s}} = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}}
$$

(sum av geometrisk rekke).

Oppgave 3a: $f(x)$ er en like funksjon med periode $2L = 2$. Den har derfor en cosinus-rekke på formen

$$
a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x
$$

der

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x\, dx = 2 \int_0^{1/2} \cos n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}\, .
\end{aligned}
$$

Rekken er derfor

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi x - \frac{2}{3\pi} \cos 3\pi x + \frac{2}{5\pi} \cos 5\pi x - \frac{2}{7\pi} \cos 7\pi x + \cdots \\
=&\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\pi x.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3b: Vi vet at Fourierrekken i a) konvergerer mot $f(x)$ unntatt i diskontinuitetspunktene. Vi setter $x = 0$. Siden f er kontinuerlig i origo, konvergerer altså Forierrekken med $x = 0$ mot $f(0) = 1$. Det vil si,

$$
\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = f(0) = 1.
$$

Derved er også

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = (1 - \frac{1}{2})/\frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Oppgave 4: Vi vet at

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

for alle x, der likheten er ment i Fourier-forstand. Det betyr naturligvis at også

$$g(x) = f(Lx/\pi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})\,.$$

Siden denne rekken har riktig form og konvergerer mot riktig funksjon, er den Fourier-rekken til g.

Oppgave 5a: Fouriertransformen til $f(x)$ er

$$\begin{aligned}\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iw)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(1+iw)x}}{-(1+iw)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}.\end{aligned}$$

Oppgave 5b: Siden

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{1+iw}\, dw$$

i Fourier-forstand, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{1+iw}\, dw = 2\pi\, f(x) = 2\pi e^{-x} \quad \text{for } \ x > 0.$$

Oppgave 6: Vi søker først løsninger på formen $u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$. Innsatt i ligningen gir det

$$\begin{gathered} F''G + FG'' = 0 \\ \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \end{gathered}$$

for en eller annen konstant k. Randbetingelsene gir kravene

$$F(0) = 0, \quad G(0) = 0 \quad \text{og} \quad G(\pi) = 0.$$

(Vi venter med den siste randbetingelsen.) Siden det er to krav for G, starter vi med ligningen

$$G'' = -kG$$

for G. Den generelle løsningen for G er avhengig av den ukjente konstanten k. Vi må skille mellom tre tilfeller:

$k > 0$:
Generell løsning: $G(y) = A\cos\sqrt{k}\,y + B\sin\sqrt{k}\,y$.
Randkravet $G(0) = 0$ gir $A = 0$.
Randkravet $G(\pi) = B\sin\sqrt{k}\,\pi = 0$ er oppfyllt for $\sqrt{k} = n$, det vil si $k = n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ som gir løsningen

$$G_n(y) = B_n \sin ny \quad \text{for} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$k = 0$:
Generell løsning: $G(y) = A + By$.
Randkravet $G(0) = 0$ gir $A = 0$. Randkravet $G(\pi) = 0$ gir derved $B = 0$, og vi får bare null-løsningen.

$k < 0$:
Generell løsning: $G(y) = Ae^{\sqrt{|k|}\,y} + Be^{-\sqrt{|k|}\,y}$.
Randkravet $G(0) = 0$ gir $A + B = 0$. Randkravet $G(\pi) = 0$ gir derved $2A\sinh\sqrt{|k|}\,\pi = 0$, det vil si $A = B = 0$, og vi har igjen bare null-løsningen.

Altså må $k = n^2$ for at vi skal få noe annet enn den trivielle null-løsningen.

Differensialligningen for F kan da skrives: $F'' = n^2F$ som har generell løsning $F_n(x) = A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}$.
Randkravet $F(0) = 0$ gir at $A_n + B_n = 0$, det vil si, $B_n = -A_n$, og $F_n(x) = 2A_n \sinh nx$.

Konklusjon: de eneste produktløsningene av den opprinnelige ligningen med de tre randkravene er løsningene

$$u_n(x, y) = C_n \sinh nx \sin ny.$$

Den siste randbetingelsen er $u(1, y) = \sin 3y$. Vi ser at $u_3(x, y) = C_3 \sinh 3x \sin 3y$ tilfredsstiller dette kravet for $C_3 = 1/\sinh 3$. Den endelige løsningen er derfor

$$u(x, y) = \frac{\sinh 3x \sin 3y}{\sinh 3}.$$

Man kan naturligvis også bruke superposisjonsprinsippet. Men akkurat i dette tilfellet var vi så heldige at en av produktløsningene faktisk gjorde jobben!

Oppgave 7: Vi setter $v = x + iy$ og $z = x - iy$ inn i ligningen og søker $w = u(x, y)$. Siden

$$\begin{aligned}
w_x &= \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
w_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} \\
w_y &= \frac{\partial w}{\partial v} \cdot i - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot i \\
w_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

får ligningen formen

$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} = 0$$

som har generell løsning $w = \varphi(v) + \psi(z)$ der φ og ψ er vilkårlige deriverbare funksjoner. Det vil si,

$$u(x, y) = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy).$$