Bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Randbetingelser : $u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$

Initialbetingelser : $u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$

Løsning v/ separasjon av de variable :

Trinn 1: Vi søker løsning på formen $u(x,t) = F(x)\,G(t)$

$u(x,t) \not\equiv 0$

Innsatt i lign: $F\ddot{G} = c^2 F'' G$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = k$$

Innsatt i randbet: $F(0) = 0 \qquad F(L) = 0$

Trinn 2: Løse : $F'' = kF$, $F(0) = 0$, $F(L) = 0$

Karakteristisk ligning : $r^2 = k$

k>0:

$$F(x) = Ae^{\sqrt{k}\,x} + Be^{-\sqrt{k}\,x}$$

$$F(0) = A + B = 0 \qquad F(L) = A\left(e^{\sqrt{k}\,x} - e^{-\sqrt{k}\,x}\right) = 0 \quad \#$$

k=0:

$$F(x) = A + Bx$$

$$F(0) = A = 0 \qquad F(L) = BL = 0 \quad \#$$

k<0:

$$F(x) = A\cos\sqrt{|k|}\,x + B\sin\sqrt{|k|}\,x$$

$$F(0) = A = 0 \qquad F(L) = B\sin\left(\sqrt{|k|}\,L\right) = 0$$

$$\sqrt{|k|}\cdot L = n\pi \qquad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\boxed{k = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

$$F(x) = B\sin\frac{n\pi x}{L}$$