Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk
Dag 13. desember 2006
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 10.01.2007

Grungje alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.

Oppgåve 1 Rekn ut integrala

$$\int_{C_1} e^z\,dz \quad \text{og} \quad \oint_{C_2} \frac{e^z}{z^7}dz$$

der C_1 er kurva parametrisert ved

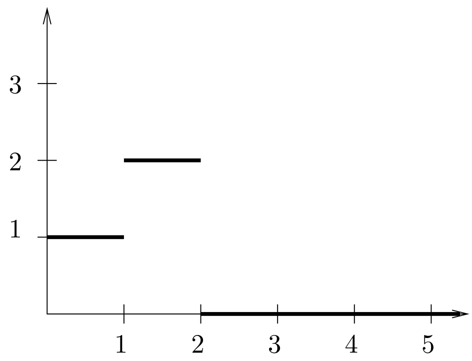
$$C_1: \qquad z(t) = \tan^{-1} t + it^2\pi \quad \text{for } 0 \le t \le 1$$

og C_2 er einingssirkelen $|z| = 1$ i positiv omløpsretning (orientert mot klokka).

Oppgåve 2 La $y(t)$ vere løysinga av differensiallikninga

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = r(t)$$

med $y(0) = y'(0) = 1$ der funksjonen r er gitt ved grafen



Finn Laplacetransformen til $y(t)$.

Oppgåve 3 Finn den Fouriertransformerte til funksjonen $h(x) = (e^{-x^2} * e^{-x^2})$.

Bruk resultatet til å finne eit uttrykk for $h(x)$ utan integralteikn og $*$.

Du kan få bruk for formelen $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$.

Oppgåve 4 Finn alle Laurentrekkene om punktet $z = 1$ for funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{e^z}{z-1}\,.$$

Oppgåve 5 For gitt parameter $w \in \mathbb{R}$, la $f(z)$ vere funksjonen gitt ved

$$f(z) = \frac{1}{h(z)}\, e^{-iwz}, \quad \text{der} \quad h(z) = z^2 - 2z + 2.$$

a) Finn singularitetane til $f(z)$ og bestem residyane til $f(z)$ i desse. (Sjå bort frå punktet $z = \infty$.)

b) La S_R vere halvsirkelen parametrisert ved

$$S_R : \qquad z(\theta) = Re^{i\theta} \quad \text{for } 0 \le \theta \le \pi.$$

Vis at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0 \quad \text{når } w \le 0.$$

c) Finn Fouriertransformen $\hat{g}(w)$ til $g(x) = \frac{1}{h(x)}$ for alle $w \in \mathbb{R}$.

Oppgåve 6 La a og b vere to reelle konstantar, og la (*) og (**) vere dei to randverdiproblema

(*)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{for } t > 0 \text{ og } x \in (0,1), \\ u(0,t) = a & \text{for } t > 0, \\ u(1,t) = b & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

og

(**)
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{for } t > 0 \text{ og } x \in (0,1), \\ v(0,t) = 0 & \text{for } t > 0, \\ v(1,t) = 0 & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

a) Dersom u_1 og u_2 begge løyser randverdiproblemet (*) (det vil seie, dersom både u_1 og u_2 er løysingar av (*)), kva for randverdiproblem løyser då høvesvis $u_1 + u_2$ og $u_1 - u_2$? Held superposisjonsprinsippet for *randverdiproblema* (*) og (**)?

b) La $u(x,t)$ vere ei løysing av randverdiproblemet (*) og la $v(x,t)$ vere definert ved

$$v(x,t) = u(x,t) - [a + (b-a)x] \quad \text{for } t \ge 0 \text{ og } x \in [0,1].$$

Vis at $v(x,t)$ er ei løysing av randverdiproblemet (**).

Bestem alle løysingar av (**) på forma

$$v(x,t) = F(x)G(t).$$

c) La $a = -1$ og $b = 1$ i (*). Finn løysinga $u(x,t)$ av initial/randverdiproblemet gitt ved (*) og initialkravet

(***)
$$u(x,0) = \sin(\pi x) \quad \text{for} \quad 0 < x < 1.$$

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$