TMA4120 Matematikk 4K høsten 2006

Ikke-tellende midtsemesterprove

Du kan tenke på dette som en eksamen. Bevilg deg 4 timer eller mer (bruk gjerne mer tid!!), og prøv å løse oppgavene best mulig. Etterpå kontrollerer du din besvarelse mot løsningsforslaget. (OBS! Ikke titt i løsningsforslaget underveis. Da lurer du bare deg selv.)

Oppgave 1: Finn funksjonen som har Laplacetransform

$$F(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{(s-1)(s^2+1)}\,.$$

Oppgave 2: La n være et gitt positivt heltall, og la $g(t)$ være en stykkevis kontinuerlig periodisk funksjon med periode π. (OBS! Ikke 2π.)

a). Vis at funksjonen

$$f_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{for } (n-1)\pi \leq t < n\pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

har Laplacetransform

$$F_n(s) = e^{-(n-1)\pi s} \int_0^\pi e^{-st} g(t)\, dt\,.$$

b). Vis at

$$\mathcal{L}(g)(s) = G(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} g(t)\, dt \quad \text{for } s > 0.$$

(Hint: skriv $g(t)$ som en sum av funksjoner $f_n(t)$.)

Oppgave 3:

a). Finn Fourier-rekken til den periodiske funksjonen $f(x)$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{for } \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases} \quad , \qquad f(x+2) = f(x) \text{ for alle } x.$$

b). Bruk resultatet i a) til å finne summen av rekkene

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

(Ved en ekte eksamen, ville dere naturligvis fått vite svaret i a) . . . .)

Oppgave 4: La $f(x)$ være en 2π-periodisk funksjon med (gitt) Fourier-rekke

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Vis at $g(x) = f(Lx/\pi)$ er en periodisk funksjon med periode $2L$ og at Fourier-rekken til $g(x)$ er

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

med de samme koeffisientene som for $f(x)$.

Oppgave 5:

a). Finn Fouriertransformen til funksjonen $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$

b). Bruk resultatet i a) til å bestemme verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{1+iw}\, dw \quad \text{for } x > 0.$$

Oppgave 6: Bruk metoden ,,separasjon av de variable" til å løse den partielle differensialligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

med randbetingelser

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = \sin 3y.$$

Oppgave 7: Bruk d'Alemberts metode til å løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

(Hint: bruk substitusjonen $v = x + iy$, $z = x - iy$.)