



15. juni 2003

EKSAMENSOPPGAVER FOR TMA4120 MATEMATIKK 4K H-03

Del B: Kompleks analyse

Oppgave B-1

- a) Finn de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 1}$$

og bestem residuene i disse.

- b) Ved hjelp av substitusjonen  $z = e^{i\theta}$  skal en beregne det reelle integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta}.$$

Oppgave B-2

- a) Finn Laurenttrekkene til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^5(1+z)}$$

om  $z = 0$ .

- b) Beregn det komplekse linjeintegralet

$$\oint_{|z|=a} \frac{dz}{z^5(1+z)} \quad \text{for } 0 < a < 1 \quad \text{og } a > 1$$

der sirkelen  $|z| = a$  gjennomløpes en gang i positiv omløpsretning.

Oppgave B-3

- a) Finn polene til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1},$$

og vis at dersom  $z_0$  er en pol for  $f(z)$ , så er residuet i  $z_0$  lik  $\frac{1}{4}z_0$ .

- b) Regn ut verdien av integralet

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 - 1}$$

hvor  $C$  er

- 1) sirkelen  $|z| = \frac{1}{2}$  i positiv retning
- 2) sirkelen  $|z - 1| = \frac{1}{2}$  i positiv retning
- 3) sirkelen  $|z + 1 + i| = 2$  i positiv retning
- 4) sirkelen  $|z + i| = 3$  i positiv retning.

Oppgave B-4

Bestem funksjonene  $f(y)$  og  $g(y)$  slik at den komplekse funksjonen

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = (x^2 - 2x + f(y)) + i(2xy + 2 + g(y))$$

blir analytisk og  $F(0) = 0$ .

Oppgave B-5

La  $s > 0$  og  $a > 0$  være gitt og definer

$$f(z) = \frac{e^{isz}}{(z - ai)^3}.$$

- a) Finn de singulære punkter for  $f$ . Bestem type og beregn residuet.
- b) La  $\Gamma_R$  betegne halvsirkelen med radius  $R$  i øvre halvplan. Vis at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

- c) Bestem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(x - ai)^3} dx$$

for  $s > 0$ ,  $a > 0$ .

Hva blir verdien av dette integralet når  $s < 0$  og  $a > 0$ ?

Oppgave B-6

La  $R$  være rektangelet med hjørner  $(-K, 0)$ ,  $(K, 0)$ ,  $(K, b)$ ,  $(-K, b)$ .

- a) Vis at integralene  $\int e^{-z^2} dz$  langs de vertikale sidene i rektangelet går mot null når  $K \rightarrow \infty$ .
- b) Vis at  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  for vilkårlig  $b$ . (Cauchys sats)

c) Finn Fourier-transformen til  $f(x) = e^{-x^2}$  gitt at  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

### Oppgave B-7

a) Bestem integralet  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z-k)(z-1/k)}$  der  $C$  er enhets sirkelen med positiv omløpsretning og  $k$  er et positiv reelt tall,  $k \neq 1$ .

b) Bruk resultatene under a) til å beregne integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k^2-2k\cos\theta} \quad \text{der } k \text{ er et positivt reelt tall, } k \neq 1.$$

(Vink: bruk substitusjon  $z = e^{i\theta}$ .)

### Oppgave B-8

Vis at en analytisk (holomorf) funksjon i enhetsdisken ( $|z| < 1$ ) som har konstant imaginærdel må være en konstant.

(Vink: Cauchy-Riemann ligningene.)

### Oppgave B-9

Hvilke verdier kan integralet

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$$

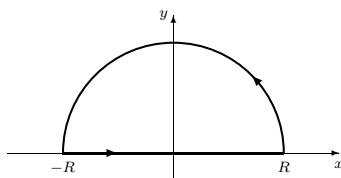
anta når  $C$  er en vilkårlig sirkel (positiv orientering) som ikke går gjennom  $z = \pm i$ ?

### Oppgave B-10

a) Hva er verdien av det komplekse integralet

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$$

når  $C_R$  (med  $R > 1$ ) er den lukkede konturen på figuren?



b) La  $\Gamma_R$  være halvsirkelen  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z > 0$ , og vis at  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 0$ .

c) Bruk resultatene i a) og b) til å finne verdien av integralet  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ .

### Oppgave B-11

Bestem  $v(x, y)$  slik at den komplekse funksjonen

$$f(z) = x^2 + x - y^2 + iv(x, y)$$

blir analytisk og  $f(0) = 0$ . Uttrykk også  $f(z)$  som et polynom i  $z$ .

### Oppgave B-12

La  $C$  betegne sirkelen  $|z| = 1$  (positivt orientert). Finn verdien av integralet

$$\oint_C z^n e^{1/z} dz$$

der  $n$  er et helt tall  $\geq 0$ .

Bruk så Maclaurinrekken til  $e^z$ , og lovlight av den leddvise integrasjonen som trengs, til å etablere formelen

$$\oint_C e^{z+1/z} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

### Oppgave B-13

For hvilken verdi av konstanten  $a$  er funksjonen

$$u(x, y) = ax^2 - 4y^2 + e^x \cos y$$

harmonisk? La  $a$  være lik denne verdien, og finn alle analytiske funksjoner  $f(z) = f(x + iy)$  som har  $u(x, y)$  som realdel.

### Oppgave B-14

La  $C$  være kurven gitt ved  $z(t) = x(t) + iy(t)$  for  $0 \leq t \leq 1$ , der

$$x(t) = t^2 \quad \text{og} \quad y(t) = \arctan t.$$

Beregn integralene

$$\int_C \text{Re } z \, dz \quad \text{og} \quad \int_C z^2 \, dz.$$

### Oppgave B-15

Vis at dersom  $f(z)$  er en analytisk funksjon med  $\text{Re } f(z) = \text{Im } f(z)$  for alle  $z$ , så er  $f(z)$  konstant.

### Oppgave B-16

Finn alle verdier av fjerderoten

$$\sqrt[4]{\frac{2i}{1+i}}.$$

**Oppgave B-17**

$$\int_0^{2\pi} \cos^{10} \theta \, d\theta = ? \quad (\text{Hint: Eulers formel})$$

**Oppgave B-18**

Betrakt uttrykket

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

- a) Bestem rekkens konvergenradius.  
 b) Finn en ligning for koeffisienten  $c_n$  og beregn  $c_5$ .

**Oppgave B-19**

Finn integralet

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{1998} \, dz}{z - 2000i}$$

der

- a)  $C$  er sirkelen  $|z - 1000| = 4000$ .  
 b)  $C$  er sirkelen  $|z| = 10$ .

**Oppgave B-20**Finn Laurentrekka til funksjonen  $f(z) = e^{(z+2)/(z-1)}$  om punktet  $z = 1$ , og finn verdien av integralet

$$\oint_C f(z) \, dz,$$

der  $C$  er sirkelen gjeven ved  $|z| = 2$ , gjennomløpt i positiv retning.**Oppgave B-21**

- a) Finn nullpunktene til polynomet  $z^6 + 1 = 0$ . La funksjonen  $f(z)$  vere definert ved

$$f(z) = \frac{z^4}{z^6 + 1}.$$

Finn dei singulære punkta til  $f(z)$ , og vis at residuet til  $f(z)$  i eit singulært punkt  $z_0$  er  $\frac{1}{6z_0}$ .

- b) La  $\Gamma_R$  vere halvsirkelen gjeven ved  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  og la kurva  $C_R$  vere samansett av intervallet  $[-R, R]$  og kurva  $\Gamma_R$ , positivt gjennomløpt. Finn verdien av integralet

$$\oint_{C_R} f(z) \, dz, \quad R > 1.$$

Vis ved direkte estimering at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) \, dz = 0.$$

- c) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^6 + 1)} \, dx.$$

**Oppgave B-22**Funksjonen  $f(z)$  er definert ved

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 3}{(z - 2)(z^2 + 1)}.$$

- a) Finn løysingane til likninga  $z^2 - 2iz + 3 = 0$ .  
 Finn den Laurentrekka til  $f(z)$  om  $z = 2$  som gjeld nærast  $z = 2$ , og finn konvergenksområde for rekka.  
 b) La  $C_1$  og  $C_2$  vere sirklane  $|z - 2| = 1$  og  $|z - 2| = 3$ .  
 Finn verdien av integrala

$$\oint_{C_1} f(z) \, dz \quad \text{og} \quad \oint_{C_2} f(z) \, dz.$$

**Oppgave B-23**

- a) Funksjonen  $f$  er definert ved

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3z + 1)}.$$

Finn dei singulære punkta, og rekn ut residua.

- b) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 \cos \theta}{3 + 2 \cos \theta} \, d\theta$$

ved å bruke substitusjonen  $z = e^{i\theta}$ .

**Oppgave B-24**

Funksjonen  $f(z)$  er definert ved  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ . Finn residuet til  $f(z)$  i punktet  $z_0 = 2$ . Finn Laurentrekke til  $f(z)$  om  $z_0 = 2$  i området  $|z-2| > 1$ . Finn verdien av integralet  $\oint_C f(z) dz$ , der  $C$  er sirkelen definert ved  $|z-2| = 2$  (positivt orientert).

**Oppgave B-25**

a) Finn Taylorrekke til funksjonen  $f(z) = e^{3iz} - 3e^{iz} + 2$  omkring  $z = 0$ . Finn deretter Laurentrekke til funksjonen  $g(z) = \frac{1}{z^3} [e^{3iz} - 3e^{iz} + 2]$  omkring  $z = 0$ . Kva er konvergensområdet for denne rekka?

b) La  $\Gamma_R$  vere halvsirkelen definert ved  $z = Re^{i\theta}$   $0 \leq \theta \leq \pi$ , positivt orientert.

Vis at  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g(z) dz = 0$ . Finn verdien av  $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} g(z) dz$ .

c) Finn verdien av integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3} dx.$$

**Oppgave B-26**

Bestem konstanten  $A$  slik at funksjonen

$$u(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + A(x^2 + y^2), \quad x > 0, y > 0$$

blir harmonisk. Finn dei konjugert harmoniske funksjonane  $v(x, y)$ .

**Oppgave B-27**

a) Finn dei singulære punkta til funksjonen  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ , og rekn ut residua.

b) Finn verdien av integralet

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}.$$

**Oppgave B-28**

Finn de to Laurentrekkene om  $z = 0$  for funksjonen  $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)(1+z)}$ . Bestem verdien av integralene

$$\oint_{C_1} f(z) dz \quad \oint_{C_2} f(z) dz$$

når  $C_1$  og  $C_2$  betegner sirklene  $|z| = \frac{1}{2}$  og  $|z| = \frac{3}{2}$  (begge positivt orientert).

**Oppgave B-29**

a) Sett  $f(z) = e^{iz^2}$  og la  $\Gamma_R$  betegne sirkelbuen  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ .

Vis at  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ . (Hint:  $\sin 2\theta \geq 4\theta/\pi$  når  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ .)

b) La  $C_R$  betegne den lukkede kurven bestående av intervallet  $[0, R]$  på  $x$ -aksen, sirkelbuen og det rette linjestykket fra  $Re^{i\pi/4}$  til 0.

Finn verdien av integralene  $\int_0^\infty \cos(t^2) dt$  og  $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$  ved å integrere  $f(z)$  en gang om  $C_R$  og deretter la  $R \rightarrow \infty$ . Det oppgis at  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

**Oppgave B-30**

a) Gitt funksjonen  $f(z) = (z^2 + 1)^6/z^7$ . Hvilken type singularitet har  $f(z)$  i punktet  $z = 0$ ? Begrunn svaret. Finn residuet til  $f(z)$  i  $z = 0$ .

b) Finn verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta$$

ved residuegning.

**Oppgave B-31**

Finn alle Laurentrekkene til funksjonen  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+2z)}$  om punktet  $z_0 = -1$ , og anggi åpne konvergensområdene for rekkene.

Bestem verdien av integralet

$$\oint_C f(z) dz$$

der  $C$  er en sirkel i positiv omløpsretning med sentrum i  $-1$  og radius 2.

**Oppgave B-32**

La  $a > 0$  og  $\omega > 0$  være gitt. La  $R > a$ , og la  $C_R$  være den enkle lukkede kurven i det komplekse plan som består av det reelle intervallet fra  $-R$  til  $R$  og halvsirkelbuen  $z = Re^{i\theta}$  for  $0 \leq \theta \leq \pi$  (positiv omløpsretning). Beregn

$$\oint_{C_R} \frac{e^{i\omega z}}{a^2 + z^2} dz$$

og vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a\omega} \quad \text{for alle } a > 0 \text{ og } \omega > 0.$$

**Oppgave B-33**

Løs ligningen

$$\sin z = 2.$$

**Oppgave B-34**

- a) La  $R > 2$ , og la  $C_R$  være den enkle lukkede kurven i det komplekse plan som består av det reelle intervallet fra  $-R$  til  $R$  og halvsirkelbuen  $z = Re^{i\theta}$  for  $0 \leq \theta \leq \pi$  (positiv omløpsretning). Bruk residuregning til å evaluere integralet

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{z^4 + 16} dz.$$

- b) Finn verdien av det reelle integralet

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 16} dx.$$

**Oppgave B-35**La  $f(z)$  være en hel funksjon, det vil si, analytisk for alle  $z$ . Vis at dersom

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^k \quad \text{for alle } z$$

for en fast konstant  $M > 0$  og et fast heltall  $k \geq 0$ , så er  $f(z)$  et polynom på formen  $f(z) = cz^k$ .**Oppgave B-36**

Bestem integralet

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \cos \theta \sin \theta}$$

ved å benytte substitusjonen  $z = e^{2i\theta}$ .**Oppgave B-37**Finn Laurentrekken(e?) om  $z_0 = 0$  til funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{z^2-1}}{z^3}$$

og bestem

$$\operatorname{Im} \left\{ \int_C f(z) dz \right\}$$

der  $C$  er det rette linjestykket som går fra 1 til  $i$ .**Oppgave B-38**La  $\Gamma_R$  være halvsirkelbuen  $z = Re^{i\theta}$  for  $0 \leq \theta \leq \pi$ , der  $R$  er en positiv konstant. Vis at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 0.$$

Finn også

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \quad \text{og} \quad \lim_{R \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)} dz.$$

**Oppgave B-39**Bestem konstanten  $A$  slik at

$$u(x, y) = e^{-y}(x \cos x + Ay \sin x)$$

blir en harmonisk funksjon. Finn de analytiske funksjonene av  $z = x + iy$  som har  $u(x, y)$  realdel.**Oppgave B-40**Finn alle Laurentrekke med sentrum i  $z_0 = 0$  til funksjonen

$$f(z) = \frac{z - 1}{4z^4 - 1}$$

og angi gyldighetsområdene til hver av dem.

**Oppgave B-41**

Finn Fouriercosinustransformen

$$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos wt \, dt$$

til den jevne funksjonen

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

ved hjelp av residuregning. Forklar hvorfor  $\widehat{f}(w)$  er en jevn funksjon.**Oppgave B-42**Finn alle Laurentrekke med sentrum i punktet  $z_0 = 1$  til funksjonen  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}$ .opp konvergensområdet for kvar rekke. Finn verdien av integralet  $\oint_C f(z) dz$ , der  $C$  er sirkel med radius  $\frac{3}{2}$  og sentrum i  $z = 2$ , orientert mot urvisaren.

**Oppgave B-43**

a) Finn alle singulære punkt til funksjonen  $f(z) = \frac{z}{z^5 + 1}$ . Teikn figur. Rekn ut residuet til  $f(z)$  i punktet  $z_0 = e^{i\pi/5}$ .

b) Rekn ut integralet  $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^5 + 1}$  ved å integrere langs randa til sirkelsektoren  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi/5$ ,  $0 \leq r \leq R$ , og så la  $R \rightarrow \infty$ . (Svaret skal skrivast på reell form.)

**Oppgave B-44**

Ved hjelp av substitusjonen  $z = e^{i\theta}$  og integrasjon rundt sirkelen  $|z| = 1$  skal ein rekne ut verdien av integralet  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - i \sin \theta}$ , der  $a$  er eit vilkårleg positivt tal.

**Oppgave B-45**

La  $P(z)$  og  $Q(z)$  vere to polynom, der graden til  $Q(z)$  er større enn eller lik 2 pluss graden til  $P(z)$ . Vis at

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0,$$

der  $C_r$  er sirkelen med sentrum i origo og radius  $r$ .

La  $z_1, z_2, \dots, z_m$  vere alle polane til  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ . Finn verdien av summen  $\sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$ .

**Oppgave B-46**

Finn dei to Laurenttrekkene til funksjonen  $f(z) = \frac{1}{(i-z)(z-1)^2}$  omkring punktet  $z = 1$ , og avgjer kvar rekkene konvergerer.

**Oppgave B-47**

Funksjonen  $f(z)$  er definert ved

$$f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{(z-i)^2}$$

der  $\omega$  er eit positivt tall.

La  $R$  vere eit reelt tal,  $R > 1$ , la  $\Gamma_R$  vere halvsirkelen gjeven ved  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , og la  $C_R$  vere kurva samansett av  $\Gamma_R$  og intervallet frå  $-R$  til  $R$ , med positiv orientering.

a) Finn verdien av integralet  $\int_{C_R} f(z) dz$ .

b) Vis at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Finn verdien av integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - 1) \cos \omega x - 2x \sin \omega x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \cos \omega x + (x^2 - 1) \sin \omega x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

**Oppgave B-48**

La ein funksjon  $f(z)$  ha ein pol av orden  $m$  i punktet  $z_0$ . Vis at funksjonen  $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  også har ein pol i  $z_0$ , og finn residuet av  $\varphi(z)$  i  $z_0$ .

**Oppgave B-49**

Funksjonen  $\varphi(z)$  er definert ved

$$\varphi(z) = \frac{1}{i - e^{2iz}}.$$

a) Finn alle singulære punkt til funksjonen  $\varphi(z)$ , vis at desse er polar, og avgjer ordenen til polane.

b) Rekn ut residuet til  $\varphi(z)$  i alle polane. La  $C_1$  vere sirkelen om origo med radius  $\frac{1}{4}$  og  $C_2$  sirkelen om origo med radius 1, begge positivt orientert. Finn verdien av integrala  $\int_{C_1} \varphi(z) dz$  og  $\int_{C_2} \varphi(z) dz$ .

**Oppgave B-50**

Ved bruk av substitusjonen  $z = e^{i\theta}$  og residuekning skal ein finne verdien av integralet

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{3 \cos \theta - 5}.$$

## Fasit

**B-1 a)**  $z_1 = -3 - 2\sqrt{2}$ ,  $z_2 = -3 + 2\sqrt{2}$ , enkle poler

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{1}{8}\sqrt{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

**b)**  $\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$

**B-2 a)**  $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n$  for  $0 < |z| < 1$ ,  $f(z) = \sum_{n=6}^{\infty} (-1)^n z^{-n}$  for  $|z| > 1$

**b)**  $2\pi i$  for  $0 < a < 1$ ,  $0$  for  $a > 1$

**B-3 a)**  $1, -1, i, -i$

**b)**  $0, \frac{\pi i}{2}, \frac{\pi}{2}(1-i), 0$

**B-4**  $f(y) = -y^2$ ,  $g(y) = -2y - 2$

**B-5 a)**  $z = ai$ , pol av orden 3;  $\operatorname{Res}_{z=ai} f(z) = -\frac{1}{2}s^2 e^{-as}$

**c)**  $-\frac{1}{2}s^2 e^{-as}$  for  $s > 0, a > 0$ ,  $0$  for  $s < 0, a > 0$

**B-6 c)**  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-w^2/4}$

**B-7 a)**  $\frac{-k}{|1-k^2|}$

**b)**  $\frac{2\pi}{|1-k^2|}$

**B-9**  $0, \pm\pi$

**B-10 a)**  $\pi/e$

**c)**  $\pi/e$

**B-11**  $v(x, y) = 2xy + y$ ,  $f(z) = z^2 + z$

**B-12**  $\frac{2\pi i}{(n+1)!}$

**B-13**  $a = 4$ ,  $f(z) = 4z^2 + e^z + iC$

**B-14**  $\frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\frac{1}{3}\left(1 + i\frac{\pi}{4}\right)^3$

**B-16**  $2^{1/8} \left( \cos \frac{(8k+1)\pi}{16} + i \sin \frac{(8k+1)\pi}{16} \right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  ( $\approx \pm(1,07 \pm 0,21i)$ )

**B-17**  $63\pi/128$

**B-18 a)**  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

**b)**  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$  for  $n \geq 3$ ;  $c_5 = 5$

**B-19 a)**  $-2000^{1998}$

**b)**  $0$

**B-20**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e}{n! (z-1)^n}$  for  $|z-1| > 0$ ;  $6\pi i e$

**B-21 a)**  $e^{(2k+1)\pi i/6}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$

**b)**  $2\pi/3$

**c)**  $\pi/3$

**B-22 a)**  $-i, 3i$ ;  $\frac{2-3i}{2-i} \cdot \frac{1}{z-2} + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2-i)^{n+2}}$  for  $0 < |z-2| < \sqrt{5}$

**b)**  $2\pi(4+7i)/5, 2\pi i$

**B-23 a)**  $0, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$ ;  $1, \mp \frac{3}{5}\sqrt{5}$

**b)**  $\frac{2\pi}{5}(5-3\sqrt{5})$

**B-24**  $1; \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n}; 0$

**B-25 a)**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(3^{n-1}-1)}{n!} i^n z^n$ ;  $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{3(3^{n+2}-1)}{(n+3)!} i^{n+3} z^n$  for  $0 < |z| < \infty$

**b)**  $-3\pi i$

**c)**  $-3\pi/2$

**B-26**  $0, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C$

**B-27 a)**  $(-2 \pm \sqrt{3})i; \pm \frac{1}{2i\sqrt{3}}$

**b)**  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

**B-28**  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-3}$  for  $0 < |z| < 1$ ,  $-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-5}$  for  $|z| > 1$ ;  $2\pi i, 0$

**B-29 b)**  $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

**B-30 a)** Pol av orden 7; 20

**b)**  $5\pi/8$

**B-31**  $-\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{2n-1}$  for  $0 < |z+1| < 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{-2n-3}$  for  $|z+1| > 1$ ; 0

**B-32**  $\frac{\pi}{a} e^{-\omega a}$

**B-33**  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**B-34 a)**  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

**b)**  $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

**B-36**  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

**B-37**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{e \cdot n!}$  for  $|z| > 0$ ;  $\frac{\pi}{2e}$

**B-38**  $0, \pi i$

**B-39**  $A = -1$ ,  $v(x, y) = e^{-y}(x \sin x + y \cos x) + C$ ,  $f(z) = ze^{iz} + iC$

**B-40**  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n (z^{4n} - z^{4n+1})$  for  $|z| < 1/\sqrt{2}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \left( \frac{1}{z^{4n+3}} - \frac{1}{z^{4n+4}} \right)$  for  $|z| > 1/\sqrt{2}$

**B-41**  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|w|}$

**B-42**  $-\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+2}}$  for  $0 < |z-1| < 3$ ,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(z-1)^n}$  for  $|z-1| > 3$ ;  $-\frac{2\pi i}{3}$

**B-43 a)**  $e^{(2k+1)\pi i/5}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4$ ;  $-\frac{1}{5}e^{2\pi i/5}$

**b)**  $\frac{\pi}{5 \sin(2\pi/5)}$

**B-44**  $\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

**B-45** 0

**B-46**  $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+3}}$  for  $0 < |z-1| < \sqrt{2}$ ;  $-\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(i-1)^{n-3}}{(z-1)^n}$  for  $|z-1| > \sqrt{2}$

**B-47 a)**  $-2\pi\omega e^{-\omega}$

**b)**  $-2\pi\omega e^{-\omega}, 0$

**B-48**  $-m$

**B-49 a)**  $\pi/4 + k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; enkle polar

**b)**  $\frac{1}{2}; 0, \pi i$

**B-50**  $-\pi/4$