Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk
Tirsdag 18. Desember 2007
9:00 – 13:00

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 18.01.2008

Grungje alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.

Oppgåve 1 Bruk Laplacetransformen til å løyse likninga

$$y(t) + \int_0^t e^{\tau} y(t-\tau)\,d\tau = \delta(t-5), \quad t \geq 0.$$

Oppgåve 2

a) Finn dei singulære punkta og residyane til funksjonen $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+5}$.

b) La S_R vere halvsirkelen med parametrisering

$$z(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

for $R > 0$. La $a > 0$ og vis at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz}\,dz = 0.$$

c) La $a > 0$ og rekn ut integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Oppgåve 3 Bestem alle reelle tal c slik at funksjonen

$$u(x, y) = e^{cx} \sin y \cos y$$

er harmonisk.

Finn alle analytiske funksjonar $f(z)$ slik at $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ når $z = x + iy$.

Oppgåve 4

a) Finn Fourier sinusrekka til funksjonen $f(x) = \pi x - x^2$, $0 \le x \le \pi$.

b) La $u(x, t)$ vere løysinga av randverdiproblemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t), & t > 0. \end{cases}$$

Vis at hvis $u(x, t) = F(x)G(t)$ då må $F(x) = Ce^x \sin nx$ for eit heiltal n.

c) Finn ei løysing $u(x, t)$ av randverdiproblemet i b) slik at

$$u(x, 0) = e^x f(x), \quad 0 < x < \pi,$$

når $f(x)$ er funksjonen gitt i a).

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$