Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Tirsdag, 18. desember, 2007
Løsningsskisse

Oppgave 1 Bruk Laplacetransformen for å løse ligningen

$$y(t) + \int_0^t e^\tau y(t-\tau)d\tau = \delta(t-5), \quad t \geq 0.$$

Vi kan skrive integralet som en konvolusjon, da blir ligningen

$$y(t) + e^t * y = \delta(t-5).$$

Vi tar Laplacetransformen av likningen:

$$Y(s) + \frac{1}{s-1}Y(s) = e^{-5s}.$$

Dette er en algebraisk ligning for Y med løsning

$$Y(s) = e^{-5s}\frac{s-1}{s} = e^{-5s} - \frac{1}{s}e^{-5s}.$$

Vi inverstransformerer og får løsningen

$$\underline{y(t) = \delta(t-5) - u(t-5)}.$$

Oppgave 2

a) Finn de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}.$$

Regn ut residuene i disse punktene.

Vi finner røttene til $z^2 + 2z + 5 = 0$, de er $-1 + 2i$ og $-1 - 2i$. Da blir

$$f(z) = \frac{1}{(z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))}.$$

Punktene $z_1 = -1 + 2i$ og $z_2 = -1 - 2i$ er de singulære punktene til f, begge er 1.ordens poler. Residuene blir

$$\operatorname{Res}_{z=-1+2i} = \lim_{z \to -1+2i} (z + 1 - 2i) f(z) = \underline{\frac{1}{4i}} \quad \text{og} \quad \operatorname{Res}_{z=-1-2i} = \lim_{z \to -1-2i} (z + 1 + 2i) f(z) = \underline{-\frac{1}{4i}}.$$

b) La a være et positivt reelt tall og la S_R være en halvsirkelen parametrisert ved

$$z(\theta) = Re^{i\theta}, \; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Vis at

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Trekantulikheten gir $|z - a| \geq |z| - |a|$, så vi får

$$|z - (-1 + 2i)| \geq |z| - \sqrt{5} \;\text{ og }\; |z - (-1 - 2i)| \geq |z| - \sqrt{5}.$$

Hvis $|z| = R > \sqrt{5}$ så blir

$$|f(z)| = |(z + 1 - 2i)^{-1}(z + 1 + 2i)^{-1}| \leq (R - \sqrt{5})^{-2}.$$

Når z er på halvsirkelen S_R er $y = \operatorname{Im} z > 0$. Dette gir $|e^{iaz}| = |e^{iax}e^{-ay}| \leq 1$. Vi bruker ML-ulikheten,

$$|\int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz| \leq \frac{\pi R}{(R - \sqrt{5})^2}.$$

Vi ser at $\lim_{R \to \infty} \dfrac{\pi R}{(R - \sqrt{5})^2} = 0$ og dermed er

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

c) Regn ut intergralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 2x + 5} dx = \lim_{R \to \infty} \operatorname{Re} \left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 2x + 5} dx \right).$$

Residueteoremet gir

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R} f(z)e^{iaz}dz + \int_{S_R} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{\,z=-1+2i} f(z)e^{iaz} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to -1+2i} (z+1-2i)f(z)e^{iaz} = 2\pi i (4i)^{-1} e^{-ia-2a} \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-2a}(\cos a - i\sin a),
\end{aligned}$$

når $R > \sqrt{5}$.

Vi bruker resultatet fra b) og får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Re}\,(\frac{\pi}{2}e^{-2a}(\cos a - i\sin a)) = \underline{\frac{\pi}{2}e^{-2a}\cos a.}$$

Oppgave 3 Bestem alle verdier av c slik at funksjonen

$$u(x,y) = e^{cx}\sin y\cos y$$

er harmonisk.
Finn alle analytiske funksjoner $f(z)$ slik at $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z),\ z = x+iy$.

Først vi regner ut $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Vi får

$$\Delta u = c^2 e^{cx}\sin y\cos y - 4e^{cx}\sin y\cos y = (c^2-4)e^{cx}\sin y\cos y.$$

$\underline{\text{Følgelig er } u \text{ harmonisk når } c = 2 \text{ eller } c = -2}$.

Hvis det eksisterer en analytisk funksjon f slik at $u = \mathrm{Re}\,(f)$, så er h harmonisk og da er $c = 2$ eller $c = -2$. La $c = 2$ for å finne v slik at $u + iv$ er analytisk bruker vi Cauchy–Riemannligningene. De gir

$$v_y = u_x = 2e^{2x}\sin y\cos y, \quad v_x = -u_y = -e^{2x}(\cos^2 y - \sin^2 y).$$

Vi intergerer den andre ligningen og får

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}e^{2x}(\cos^2 y - \sin^2 y) + C(y).$$

Ved hjelp av den første ligningen ser vi at $C(y) = C$ er uavhengig av y. Dette gir

$$\begin{aligned}
f(x,y) =& u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}(2\sin y\cos y - i(\cos^2 y - \sin^2 y + C) \\
=& -\frac{i}{2}e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y + C) = \underline{-\frac{i}{2}e^{2z} + Ci.}
\end{aligned}$$

Hvis $c = -2$ vi får

$$v_y = u_x = -2e^{-2x}\sin y\cos y, \quad v_x = -u_y = -e^{-2x}(\cos^2 y - \sin^2 y)$$

og

$$v(x,y) = \frac{1}{2}e^{-2x}(\cos^2 y - \sin^2 y) + C.$$

En analytisk funksjon blir da

$$\begin{aligned} f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) &= \frac{1}{2}e^{-2x}(2\sin y\cos y + i(\cos^2 y - \sin^2 y + C) \\ &= \frac{i}{2}e^{-2x}(\cos 2y - i\sin 2y + C) = \underline{\frac{i}{2}e^{-2z} + iC}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Finn Fourier sinusrekken til funksjonen $f(x) = \pi x - x^2,\ 0 \le x \le \pi$.

Vi har

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx dx \\ &= \frac{2(\pi x - x^2)}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos x dx \\ &= \frac{2(\pi - 2x)}{n\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi 2\sin nx dx \\ &= \frac{4}{n^3\pi}(-\cos nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{n^3\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}. \end{aligned}$$

Følgelig er $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{8}{(2k+1)^3\pi}$.

Fourier sinusrekken blir

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\sin nx} = \frac{8}{\pi}\sin x + \frac{8}{27\pi}\sin 3x + ...$$

b) La u bli en løsning av randverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} - 2u_x, &\quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, &\quad t > 0. \end{aligned}$$

Vis at hvis $u(x,t) = F(x)G(t)$ så blir $F(x) = e^x \sin nx$ hvor n er et helt tall.

Ligningen blir $FG' = F''G - 2F'G$ og randbetingelsene holder når $F(0) = F(\pi) = 0$. Vi skriver ligningen på formen

$$\frac{G'}{G} = \frac{F'' - 2F'}{F} = k.$$

Randverdiproblemet til F er

$$F'' - 2F' - kF = 0, \tag{1}$$
$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{2}$$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 2\lambda - k = 0$. Den har to røtter, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ og $\lambda_2 = 1 - \sqrt{1+k}$. Vi har tre tilfeller:

- $1 + k > 0$, da røttene er reelle og generell løsning blir $F(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Da gir (2) at
$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{og} \quad C_1 e^{\lambda_1 \pi} + C_2 e^{\lambda_2 \pi} = 0,$$
og dermed må $C_1 = C_2 = 0$ (fordi $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Vi får $F(x) = 0$.
- $1 + k = 0$, da generell løsning er $F(x) = C_1 + C_2 x$, og vi får $C_1 = 0 = C_1 + C_2\pi$ og $F(x) = 0$.
- $1 + k < 0$, la $1 + k = -w^2$, generell løsningen blir $F(x) = C_1 e^x \cos wx + C_2 e^x \sin wx$. Da (2) gir $C_1 = 0 = C_1 e^\pi \cos w\pi + C_2 e^\pi \sin w\pi$. Hvis $C_2 \neq 0$, må $\sin w\pi = 0$ og dermed er $w \in \mathbb{Z}$

Vi har funnet at problemet har en ikke-triviel løsning (en løsning forskjellig fra null) når den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 2\lambda - k = 0$ har to komplekse røtter, $\lambda_{1,2} = 1 \pm ni$. Da blir $k = -1 - n^2$ og $\underline{F_n = e^x \sin nx,\ n = 1, 2, 3, ...}$

c) Finn løsningen av randverdiproblemet i b) som tilfredstiller

$$u(x, 0) = e^x f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

der funksjonen $f(x)$ blir gitt i a).

Fra løsningen i b) vet vi at $F_n = e^x \sin nx$ og $G' - kG = 0$, $k = -1 - n^2$. Vi finner følgende løsning:

$$G_n = A_n e^{-(1+n^2)t}.$$

Alle løsninger på formen $u(x, y) = F(x)G(t)$ av randverdiproblemet er gitt som

$$u_n(x, t) = A_n e^x \sin nx e^{-(1+n^2)t},\ n = 1, 2, 3, ...$$

Ut i fra superposisjonsprinsippet er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^x \sin nx e^{-(1+n^2)t} \tag{3}$$

en kandidat til løsning av randverdiproblemet. Vi har

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^x \sin nx.$$

Betingelsen $u(x,0) = e^x f(x)$ gir $A_n = b_n$ fra løsning til a). Vi får

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^x \sin nx e^{-(n^2+1)t} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi} e^x \sin nx e^{-(n^2+1)t}}.$$