

Klassifisering av (quasi) lineær 2.ordens PDL

$$(*) \quad Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Type	Betingelse	Kanonisk eksempel
Hyperbolsk	$AC - B^2 < 0$	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ bølge, $y=t$
Parabolsk	$AC - B^2 = 0$	$u_t - c^2 u_{xx} = 0$ varme, $y=t$
Elliptisk	$AC - B^2 > 0$	$u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace

Karakteristikkene: $y - y_1(x) = \text{konst}$, $y - y_2(x) = \text{konst}$ der

$$\boxed{A(y'_i)^2 - 2B(y'_i) + C = 0} \quad \text{for } i=1,2$$

Eksempler:

- Bølgelikning: $u_{tt} - u_{xx} = 0$; $A=-1, B=0, C=1$ [$y=t$]

$$-(y')^2 + 1 = 0 \rightarrow y' = \pm 1 \rightarrow y(x) = \pm x + \text{konst.}$$

Karakteristikkene: $y \pm x = \text{konst}$ dvs. $\boxed{t \pm x = \text{konst.}}$

- Laplace likning: $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $A=1=C, B=0$

$$(y')^2 + 1 = 0 \rightarrow y' = \pm i \rightarrow y(x) = \pm ix + \text{konst.}$$

Karakteristikkene: $\boxed{y \pm ix = \text{konst.}}$ (ikke så nyttig!)

Obs:

Hyperbolsk (*)

Parabolsk (*)

Elliptisk (*)

hva karakteristikkene
se Kreiszig
s. 551

$$u_{rs} = F_1$$

$$u_{rr} = F_2$$

$$u_{rr} + u_{ss} = F_3$$

} Normal
form

(~ bølge / varme / Laplace)