TMA4120 Matematikk 4K
Eksamen høsten 2014

Løsningsforslag

1

1. Laplace-transformer ligningen:

$$\begin{aligned} sY - y(0) + Y(s) &= \mathcal{L}\left[e^{-t}\cos t\right](s) - 5\mathcal{L}[u(t-1)](s) \\ &= \mathcal{L}[\cos t](s+1) - 5\frac{e^{-s}}{s} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - 5\frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

   Her har vi brukt s-forskyvning og formlene for $\mathcal{L}\left[\cos t\right](s)$ og $\mathcal{L}[u(t-1)](s)$ (tabell).

2. Løs for Y: $(y(0) = 0)$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} - 5e^{-s}\frac{1}{s(s+1)}$$

3. $\mathcal{L}^{-1}$-transformerer:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right](t) - 5\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s(s+1)}\right](t)$$

   Here

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \implies \mathcal{L}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right](t) = 1 - e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s(s+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right](t-1)u(t-1) = (1-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

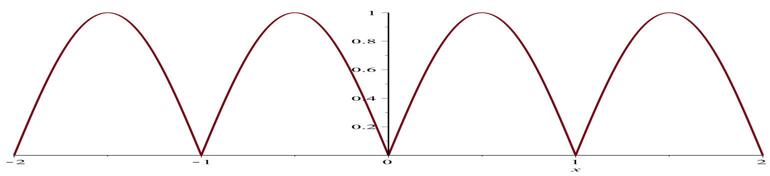
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right](t) = e^{-t}\mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = e^{-t}\sin t$$

   Dvs.

$$y(t) = e^{-t}\sin t - 5(1-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

PS: Formelarket gir direkte at $\mathcal{L}[e^{-t}\cos t](s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right](t) = e^{-t}\sin t$.

2 Fourier-cosinusrekka til $f(x) = \sin(\pi x)$ på $[0,1]$ er Fourier-rekka til den like 2-periodiske utvidelsen g av f til $\mathbb{R}$:



Since $\cos(2n\pi 0) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = g(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cdot 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

3 1. Fouriertransformer initialverdiproblemet (mhp x):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t] + 3\mathcal{F}[u_x] + 5\mathcal{F}[u] &= 0, && w \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\ \mathcal{F}[u(x,0)] &= \mathcal{F}[g], && w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La $\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}[u(.,t)](w), \hat{g}(w) = \mathcal{F}[g(.)](w)$ og bruk at

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u] = \hat{u}_t \qquad \text{og} \qquad \mathcal{F}[u_x] = iw\hat{u}$$

slik at

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + (3iw+5)\hat{u} &= 0, && w \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\ \hat{u}(w,0) &= \hat{g}(w), && w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Løs for $\hat{u}$:

$$\hat{u}(w,t) = \hat{g}(w)e^{-(3iw+5)t}.$$

3. $\mathcal{F}^{-1}$-transformer (bruk hint):

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(w,t)](x9 = e^{-5t}\mathcal{F}^{-1}[e^{-3iwt}\hat{g}(w)](x) = e^{-5t}g(x-3t).$$

4 **a)** Nevner har nullpunkt i $z = 0$, $z = \pm 1$ og teller i $z = \pm 2$, dvs. $f(z)$ har singulariteter, 1. ordens poler, i $z = 0$, $z = \pm 1$. Sirkelen $|z| = \frac{1}{2}$ omslutter kun $z = 0$, mens sirkelen $|z-1| = \frac{11}{10}$ omslutter $z = 0$ og $z = 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0} zf(z) = \frac{0-4}{1-0} = -4,\\ \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{z^2-4}{(z(1-z^2))'}\Big|_{z=1} = \frac{3}{2} \qquad \left(\text{eller } \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2-4}{-z(z-1)(z+1)} = \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Residyteoremet gir da:

$$\begin{aligned} &\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i(-4) = -8\pi i,\\ &\oint_{|z-1|=\frac{11}{10}} f(z)dz = 2\pi i(-4+\frac{3}{2}) = -5\pi i. \end{aligned}$$

b) Siden $f(z) = \left(z - \frac{4}{z}\right)g(z)$ for $g(z) = \frac{1}{1-z^2}$, og

$$g(z) \overset{u=z^2}{=} \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \qquad \text{for } |u| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$$

$$g(z) \overset{u=\frac{1}{z^2}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{v}} = -v\frac{1}{1-v} = -\sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-2} \qquad \text{for } |u| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1,$$

fordi den geometriske rekken konvergerer for $|z| < 1$, har vi følgende Laurentrekker:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(z - \frac{4}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-1} \\
&= -\frac{4}{z} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \qquad \text{for } 0 < |z| < 1, \\
f(z) &= \left(z - \frac{4}{z}\right) \left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-2}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-3} \\
&= -\frac{1}{z} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-3} \qquad \text{for } |z| > 1.
\end{aligned}$$

c) Laurentrekka i $z = i$ med sentrum i $z = 1$ konvergerer i den største annulus

$$A_{r,R} = \{z : r < |z - 1| < R\}$$

hvor $A_{r,R} \ni i$ og f er analytisk. Funksjonen f er analytisk uten om i de singulære punktene, og avstanden fra $z = 1$ til disse er

$$|1 - 1| = 0, \quad |1 - 0| = 1, \quad |1 - (-1)| = 2.$$

Dvs. at $f(z)$ har Laurentrekker om $z = 1$ som konvergerer i $A_{0,1}$, $A_{1,2}$, eller $A_{2,\infty}$.

Avstanden fra $z = 1$ til $z = i$: $d = |1 - i| = \sqrt{2}$, dvs. $1 < d < 2$ og $i \in A_{1,2}$.
Det største konvergensområde som inneholder i er da $A_{1,2}$.

5 Første integral:

$$\int_{S_r} f(z)dz = \int_{S_r} \frac{3}{z^2 + 4} dz + \int_{S_r} \frac{7}{z} dz = I_{1,r} + I_{2,r} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 7\pi i$$

siden

$$I_{2,r} = \int_0^{\pi} \frac{7}{re^{it}} ire^{it} dt = 7\pi i \qquad \text{og} \qquad |I_{1,r}| \overset{\text{ML}}{\leq} \max_{|z|=r} \frac{3}{|z^2 + 4|} \cdot \pi r \overset{r \to 0}{\to} 0.$$

Her har vi brukt ML-ulikheten og at $\max_{|z|=r} \frac{3}{|z^2+4|} \overset{r \to 0}{\to} \frac{3}{4}$ siden $\frac{3}{z^2+4}$ er kontinuerlig i $z = 0$.

Andre integral:

$$\left| \int_{S_r} g(z)dz \right| \overset{\text{ML}}{\leq} \max_{|z|=r} \frac{|z + i|}{|1 + z^4|} \pi r \leq \frac{r + 1}{r^4 - 1} \pi r \overset{r \to \infty}{\to} 0,$$

siden $|z + i| \leq |z| + 1 = r + 1$ når $|z| = r$ og

$$|z^4| = |z^4 + 1 - 1| \leq |z^4 + 1| + 1 \implies |z^4 + 1| \geq |z|^4 - 1 = r^4 - 1 \text{ når } |z| = r > 1.$$

6 **a)** Likning:

$$v = u + \sin x, \qquad v_x = u_x + \cos x, \qquad v_{xx} = u_{xx} - \sin x, \qquad u_{yy} = v_{yy}$$
$$\implies \sin x = u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + \sin x + v_{yy}$$

$$\implies v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad \text{i} \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned}
v(0,y) &= u(0,y) + \sin 0 = 0 + 0 = 0, && 0 < y < \pi,\\
v(\pi,y) &= u(\pi,y) + \sin \pi = 0 + 0 = 0, && 0 < y < \pi,\\
v(x,0) &= u(x,0) + \sin x = 0 + \sin x = \sin x, && 0 < x < \pi,\\
v(x,\pi) &= u(x,\pi) + \sin x = 0 + \sin x = \sin x, && 0 < x < \pi.
\end{aligned}$$

b) Løs først for v med separasjon av variable:

$$v(x,y) = F(x)G(y)$$
$$\implies \begin{cases} F''G + FG'' = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,\\ F(0)G(y) = 0 = F(\pi)G(y), & 0 < y < \pi,\\ F(x)G(0) = \sin x = F(x)G(\pi), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Divider første likning på FG og anta at $FG \neq 0$,

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = \text{konst} = k.$$

Hvis $FG \not\equiv 0$ gir andre likning at $F(0) = 0 = F(\pi)$.
Tredje likning en inhomogen betingelse, vi venter med den! Vi har da at

$$F'' = kF, \qquad 0 < x < \pi, \tag{1}$$
$$F(0) = 0 = F(\pi) \tag{2}$$
$$G'' = -kG, \qquad 0 < y < \pi. \tag{3}$$

Løs (1) og (2):

i) $k = 0 \implies F = A + Bx \overset{(2)}{\implies} A = B = 0 \implies F \equiv 0$

ii) $k > 0 \implies F = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x} \overset{(2)}{\implies} A + B = 0$ og $Ae^{\sqrt{k}\pi} + Be^{-\sqrt{k}\pi} = 0$
$\implies A = B = 0 \implies F \equiv 0$

iii) $k = -c^2 < 0 \implies F = A\cos cx + B\sin cx \overset{(2)}{\implies} A = 0$ og $B \sin c\pi = 0$
$\implies A = 0$ og $[B = 0 \text{ eller } \sin c\pi = 0]$
$B = 0 \implies F \equiv 0$ mens
$\sin c\pi = 0 \Leftrightarrow c = n \in \mathbb{Z} \qquad (\text{og } k = -n^2)$

Dvs. (1) og (2) har løsning $F \not\equiv 0$ kun hvis $k = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, og da er

$$F = F_n = B_n \sin nx.$$

Løs (3) når $k = -n^2$:

$$G'' - n^2 G = 0 \implies G = Ce^{ny} + De^{-ny}$$

Dvs. løsning v av (1)-(3):

$$v_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = \left(\tilde{C}_n e^{ny} + \tilde{D}_n e^{-ny}\right) \sin nx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Merk at likning (4) og (5) i eksamensoppgaven svarer til F_n med $n = 1$. Prøv med $v = v_1$:

$$\sin x \overset{(4)}{=} v_1(x,0) = (\tilde{C}_1 + \tilde{D}_1)\sin x \implies \tilde{C}_1 + \tilde{D}_1 = 1$$
$$\sin x \overset{(5)}{=} v_1(x,\pi) = (\tilde{C}_1 e^{\pi} + \tilde{D}_1 e^{-\pi})\sin x \implies \tilde{C}_1 e^{\pi} + \tilde{D}_1 e^{-\pi} = 1$$

Disse to ligningene gir

$$\begin{cases} \tilde{C} = 1 - \tilde{D}, \\ (1-\tilde{D})e^{\pi} + \tilde{D}e^{-\pi} = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{D} = \frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}, \\ \tilde{C} = \frac{1-e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}. \end{cases}$$

Dermed har vi funnet v, og fra a) har vi da at

$$u(x,y) = v(x,y) - \sin x = \left(-1 + \frac{(1-e^{-\pi})e^{y} + (e^{\pi}-1)e^{-y}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right)\sin x.$$