Løsningsforslag - Øving 10

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.6

10 Vi bruker definisjonen $\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$:

$$\begin{aligned}
\sinh(3+4i) &= \frac{1}{2}\left(e^{3+4i} - e^{-3-4i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^3(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos(-4) + i\sin(-4))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^3(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos 4 - i\sin 4)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 4\left(e^3 - e^{-3}\right) + i\sin 4\left(e^3 + e^{-3}\right)\right) \\
&= \cos 4 \sinh 3 + i \sin 4 \cosh 3.
\end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.7

15

$$\begin{aligned}
\ln(\mathrm{e}^i) &= \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^i) + 2n\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\
&= \ln\left|(\mathrm{e}^i)\right| + i \cdot \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi i \\
&= 0 + i \cdot \mathrm{Arg}(\cos(1) + i\sin(1)) + 2n\pi i \\
&= i \cdot 1 + 2n\pi i \\
&= (1 + 2n\pi)i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.1

20 Uttrykket kan skrives som

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Dette er likningen til en ellipse med sentrum i $(2, -1)$ og buen til ellipsen kan parametriseres som $x - 2 = \sqrt{5}\cos t$ og $y + 1 = 2\sin t$.

En parametrisering til uttrykket blir dermed

$$z(t) = 2 + \sqrt{5}\cos t + i(-1 + 2\sin t),$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$.

22 $\mathrm{Re}(z)$ er ikke en analytisk funksjon, så må bruke metode 2.

Parametrisering av kurven C:

$$z(t) = t + \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2\right)i, \qquad 1 \le t \le 3$$

$$=> \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t, \qquad \mathrm{d}z = (1 + (t-1)i)\mathrm{d}t$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_1^3 t \cdot (1 + (t-1)i)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^3 t\,\mathrm{d}t + i\int_1^3 (t^2 - t)\,\mathrm{d}t \\
&= 4 + i\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^3 \\
&= 4 + \frac{14}{3}i
\end{aligned}$$

25 $f(z) = ze^{z^2}$ er analytisk i $\mathbb{C}$, og $F'(z) = f(z)$ hvis $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$.
Dermed er

$$\int_C f(z)dz = F(i) - F(1) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) = -\sinh 1$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.2

13 Vi finner nullpunktene til nevneren:

$$z^4 = 1.2 \implies |z^4| = |z|^4 = 1.2 \implies |z| = \sqrt[4]{1.2} > 1$$

Altså ligger alle nullpunktene utenfor enhetssirkelen. Dermed er

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1.2}$$

deriverbar og analytisk i $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt[4]{1.2}\}$. Siden D er enkeltsammenhengende og enhetssirkelne $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ er en enkel lukket kurve i D, gir Cauchys integralteorem at

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

22 $\mathrm{Re}(z)$ er ikke en analytisk funksjon, så Cauchys teorem kan ikke brukes her.

Deler kurven opp i to deler, C_1: langs x-aksen og C_2: halvsirkelen

$$\begin{aligned}
&C_1 : z(t) = t, \qquad -1 \le t \le 1, \\
&\qquad => \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t \\
&C_2 : z(t) = \cos t + i\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi, \\
&\qquad => \quad \mathrm{d}z = (-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = \cos t
\end{aligned}$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}
\oint_C \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \operatorname{Re}(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \cos t(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int_0^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2} i
\end{aligned}$$

$\boxed{27}$ Både $\cos z$ og z er analytiske overalt, så $\cos z/z$ er analytisk overalt bortsett fra i 0. Dermed holder (6) side 658, altså

$$\oint_{C_1} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz$$

for f og C_1, C_2, der C_1 er $|z| = 1$ mot klokken og C_2 er $|z| = 3$, med klokken. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercise A Use the ML-inequality to find an upper bound for the absolute value of the integral

$$\int_C z^3 + 1$$

where C is the straight-line segment from 0 to $1 + 2i$.
Løsning. Ved å bruke pytagaros ser vi at lengden til C er $\sqrt{5}$. Videre observer vi at $|z^3 + 1| \leq 2\sqrt{26}$ for all z på kurven C. Ved ML ulikheten følger det dermed at

$$\left|\int_C z^3 + 1\right| \leq 2\sqrt{26}\sqrt{5} = 2\sqrt{130}$$