1. Consider the boundary value problem for the wave equation:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \tag{1}$$

(a) Find all solutions of (1) on the form $u(t,x) = F(t)G(x)$.

(b) Find the solution of (1) that also satisfies the following initial condition

$$u(0,x) = \pi x - x^2, \quad u_t(0,x) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Solution. This is exercise 2 from exam Fall 2017. See Exam 2017

2. Consider the boundary value problem for the Laplace equation:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 2\pi \quad u(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0. \tag{2}$$

(a) Find all solutions of (2) on the form $u(t,x) = F(t)G(x)$.

(b) Find the solution of (2) that also has the following values on the horizontal sides

$$u(0,x) = u(x,2\pi) = \sin\frac{3x}{2} + 4\sin\frac{7x}{2} + -5\sin\frac{11x}{2}.$$

Solution. This is exercise 2 from exam Summer 2017. See Kont 2017

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.3

$\boxed{5}$ Vi må løse PDE'en

$$u_{tt} = u_{xx}$$

for $t \geq 0$ og $x \in [0,1]$. Grense- og initsialbetingelsene er henholdsvis

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

Separasjon av variabler: Anta at vi kan skrive $u(x,t) = F(x)G(t)$. Da er

$$F''(x)G(t) = u_{xx} = u_{tt} = F(x)G''(t).$$

Dvs $F''/F = G''/G =: -\mu^2 < 0$ konstant. (Man kan vise at positiv konstant bare vil gi trivielle løsninger). Dette gir ODE'ene

$$F''(x) = -\mu^2 F(x), \quad G''(t) = -\mu^2 G(t)$$

Med generell løsing for F

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

Nå er

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t), \quad 0 = u(1,t) = F(1)G(t)$$

som medfører at $F(0) = F(1) = 0$ dersom løsningen er ikke-triviell. Altså er $0 = F(0) = A$ og

$$0 = F(1) = B\sin\mu,$$

så $\mu = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ og alle multipler av funksjonene

$$F_n(x) := \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}$$

er løsninger av ODE'en for F med de gitte grensebetingelsene. Generelle løsninger for G er nå

$$G_n(t) := B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t$$

og løsningene som tilfredsstiller PDE'en og grensebetingelsene er på formen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t) \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vi forsøker nå å finne løsningen som tilfredsstiller initsialbetingelsene. I dette tilfellet er dette enkelt pga. formen på den gitte funksjonen f :

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) \\ k \sin 3\pi x &= u_n(x,0) \\ &= B_n \sin n\pi x. \end{aligned}$$

Vi kan altså velge løsningen når $n = 3$ og $B_3 = k$. Videre er

$$\frac{\partial}{\partial t} u_3(x,t) = (-3\pi B_3 \sin 3\pi t + 3\pi B_3^* \cos 3\pi t) \sin 3\pi x$$

så $B_3^* = 0$ ettersom vi trenger at $\frac{\partial}{\partial t} u_3(x,0) = 0$. Løsningen på oppgaven er nå gitt ved

$$u(x,t) = k \cos 3\pi t \sin 3\pi x.$$