Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.4

13 Diskriminanten til likninga er $1 \cdot 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} < 0$, så likninga er av hyperbolsk type. Den karakteristiske likninga er

$$(y')^2 - 5y' + 4y = (y' - 1)(y' - 4) = 0,$$

som gir y' lik 1 eller 4, altså er $y = x + C_1$ og $y = 4x + C_2$ løysingane. Vi får dermed characteristics $\Phi(x, y) = y - x =$ konstant og $\Psi(x, y) = y - 4x =$ konstant. Tabellen side 556 gir variabelskifte $v = \Phi$ og $w = \Psi$ med $u_{vw} = 0$ som normalforma av likninga vi starta med. $u_{vw} = 0$ har løysing $u = f(v) + g(w)$, altså er

$$u(x, y) = f(y - x) + g(y - 4x)$$

løysingane vi var ute etter, der f og g er uspesifiserte funksjonar.

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.7

2 Vi skal skrive løysinga av $u_t = c^2 u_{xx}$ på integralform som i (6). Vi finn $A(p)$ og $B(p)$ ved hjelp av (8):

$$\begin{aligned}
A(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \cos pv dv \\
&= \frac{\sin pa - \sin(-pa)}{p\pi} \\
&= \frac{2 \sin pa}{p\pi} \\
B(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sin pv dv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Løysinga på integralform er dermed

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin pa}{p\pi} \cos px e^{-c^2 p^2 t} dp.$$

4

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-|x|} \\
u(x, t) &= \int_0^{\infty} \left[A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)\right] e^{-c^2 p^2 t} dp \\
\implies u(x, 0) &= \int_0^{\infty} \left[A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)\right] dp = f(x)
\end{aligned}$$

Vi ser dette er et Fourier-integral:

$$
\begin{aligned}
A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\cos(pv)dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{v}\cos(pv)dv + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-v}\cos(pv)dv \\
&= \frac{1}{\pi}e^{v}\cos(pv)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{v}\sin(pv)dv - \frac{1}{\pi}e^{-v}cos(pv)\Big|_{0}^{\infty} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-v}\sin(pv)dv \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}e^{v}\sin(pv)p\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{v}\cos(pv)p^2dv + \frac{1}{\pi}e^{-v}\sin(pv)p\Big|_{0}^{\infty} \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-v}\cos(pv)p^2dv \\
&= \frac{2}{\pi} - p^2A(p) \\
\implies A(p) &= \frac{2}{\pi(1+p^2)} \\
B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\sin(pv)dv = 0 \qquad \text{siden integranden er odde} \\
\implies u(x,t) &= \int_{0}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+p^2)}\cos(px)e^{-c^2p^2t}dp
\end{aligned}
$$

Alternativt via Fouriertransformasjon:

$$
\hat{u}_t(w,t) = -c^2w^2\hat{u}(w,t) \implies \hat{u}(w,t) = C(w)e^{-c^2w^2t} \implies \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}
$$

siden $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$.

$$
\implies u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}e^{-\frac{1}{4c^2t}(x-p)^2}dp
$$

$\boxed{5}$

$$
u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}
$$

$$
u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right] \mathrm{e}^{-c^2p^2t}\, \mathrm{d}p
$$

Bruker initialbetingelsen til å bestemme $A(p)$ og $B(p)$:

$$
f(x) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right]\, \mathrm{d}p
$$

$$
\begin{aligned}
A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |v|\cos(pv)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} v\cos(pv)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{v}{p}\sin(pv)\right]_0^1 - \frac{1}{p}\int_0^1 \sin(pv)\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin p}{p} + \frac{1}{p^2}(\cos p - 1)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{p\sin p + \cos p - 1}{p^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |v|\sin(pv)\,\mathrm{d}v \\
&= 0 \qquad ,
\end{aligned}
$$

fordi $|v|\sin(pv)$ er odde.

Ender opp med løsningen

$$
\underline{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{p\sin p + \cos p - 1}{p^2}\cos(px)\mathrm{e}^{-c^2p^2t}\,\mathrm{d}p}
$$

$\boxed{13}$ Bruker (12) og reknar:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})e^{-z^2}dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/(2c\sqrt{t})}^{\infty} e^{-z^2}dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/(2c\sqrt{t})}^{0} e^{-z^2}dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\infty) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

I steget frå første til andre linje brukte vi at $x + 2cz\sqrt{t} = 0$ når $z = -x/(2c\sqrt{t})$.