Fra Kreyszig (10th), avsnitt 17.1

11 Området beskrevet i i oppgaven er den delen av annulusen med indre radius 1, ytre radius 3 og sentrum i 0 som ligger i kvadrantet $x > 0$, $y > 0$, se Figur 1.

La $z = re^{i\theta}$. Da er $w = z^3 = r^3 e^{3i\theta}$, så vi kan skrive $w = se^{i\phi}$ for $1 < s < 27$ og $0 < \phi < 3\pi/2$, så bildet av avbildningen ligger innenfor området diss likningene beskriver. Vi kan se at bildet faktisk er hele dette området, for hvis $w_0 = s_0 e^{i\phi_0}$ tilfredsstiller $1 < s_0 < 27$ og $0 < \phi_0 < 3\pi/2$, så er $w_0 = (s_0^{1/3} e^{\phi_0 i/3})^3$, der $1 < s_0^{1/3} < 3$ og $0 < \phi_0/3 < \pi/2$. Se figur 2 for en illustrasjon av området.

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.4

2

$$f(x+iy) = i\left(x^2+y^2\right) = u(x,y) + iv(x,y)$$

der $u \equiv 0$ og $v = x^2 + y^2$. Dermed er f ikke analytisk ved teorem 1 s.625 fordi

$$u_x = 0 \neq 2y = v_y.$$

3 Vi har $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, der $u(x,y) = e^{-x}\cos y$ og $v(x,y) = -e^{-x}\sin y$, og

$$u_x = -e^{-x}\cos y = v_y$$
$$v_x = e^{-x}\sin y = -u_y.$$

Dermed tilfredsstiller $f(z)$ Cauchy-Riemann-likningane. I tillegg er u, v og alle deira deriverte kontinuerlege i $\mathbb{C}$, så f er analytisk i $\mathbb{C}$.

18

$$u = x^3 - 3xy^2$$
$$u_{xx} = 6x$$
$$u_{yy} = -6x$$

Så u er harmonisk. For å finne en harmonisk konjugert funksjon setter vi opp Cauchy-Riemann ligningene:

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$$
$$v_x = -u_y = 6xy$$

Integrerer den første med hensyn på y, og deriverer resultatet med hensyn på x, og får:

$$v = 3x^2y - y^3 + h(x)$$
$$v_x = 6xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

Og vi ser at dette samsvarer med Cauchy-Riemann-ligningene om $\mathrm{dh}/\mathrm{dx} = 0$, altså $h = c$ for en reell konstant c.

De korresponderende analytiske funksjonene til $u = x^3 - 3xy^2$ er altså

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 + ic \\ &(= (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic) \end{aligned}$$

for c en reell konstant.

19 Funksjonen u er *ikke* harmonisk, siden

$$u_{xx} = \mathrm{e}^{-x}\sin 2y \neq 4\mathrm{e}^{-x}\sin 2y = -u_{yy}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.5

5

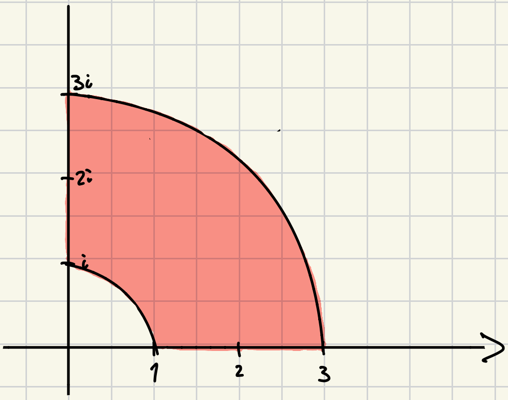
$$\begin{aligned} e^{1-3\pi i} &= e \cdot e^{-3\pi i} \\ &= e \cdot (-1) \\ &= -e. \end{aligned}$$

Dermed er $|e^z| = e$.

22 Vi vet at $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$. Vi ser da at vi må ha $\cos y = -1$, som gir $y = \pi i + 2\pi i n$ og $e^x = 2$. Dermed:

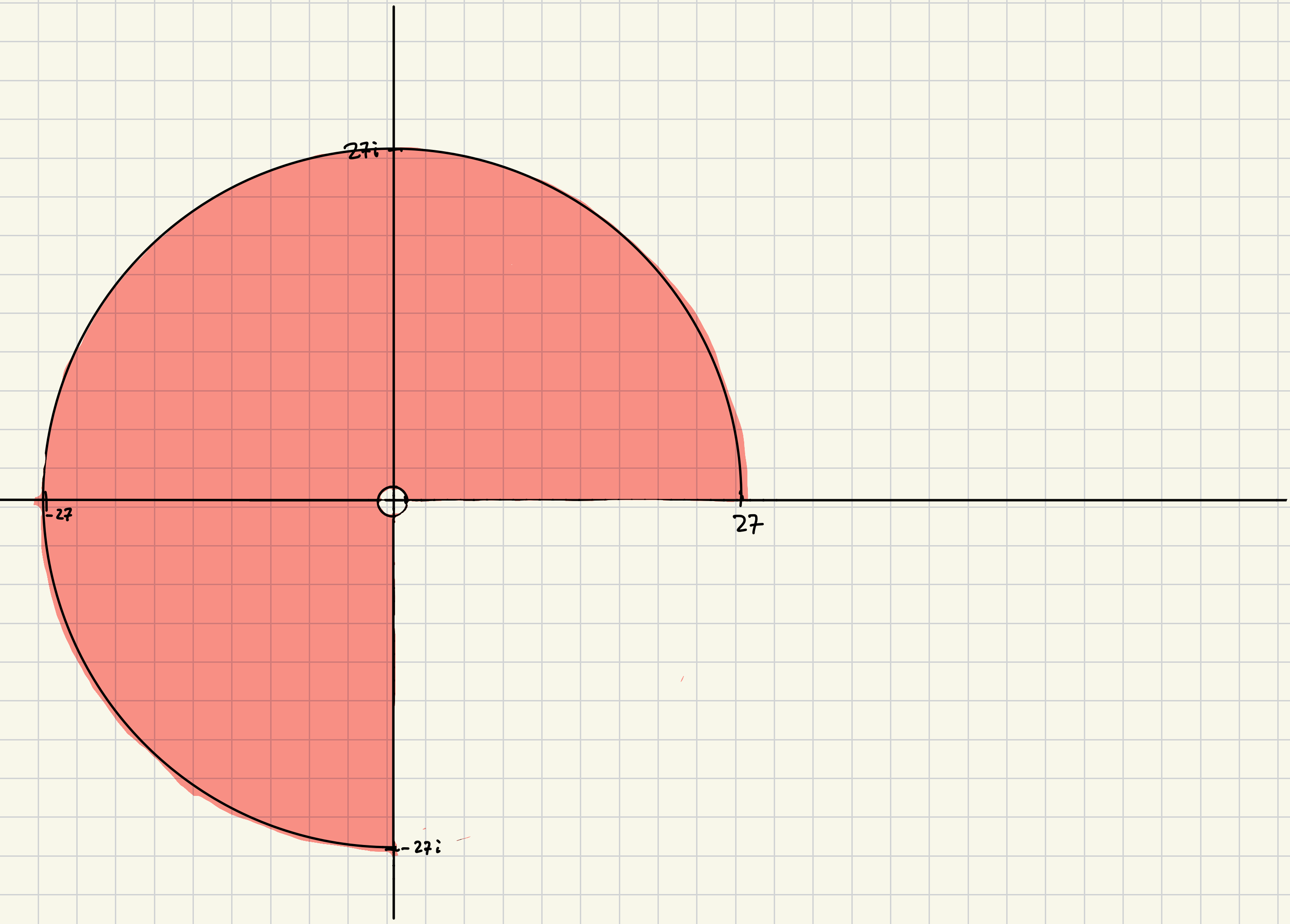
$$z = \ln 2 + i\pi + in2\pi$$

for $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$



Figur 1. Området gitt ved

$1 < |z| < 3$, $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}$. (Oppgave 17.1.11)



Figur 2 området gitt ved $1 < |z| < 27$, $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{2}\pi$

(Oppgave 17.1.11)