Tm. 4: Taylors tm.

Anta (A3) og $z_0 \in D$:

(a) $f(z)$ har entydig Taylorrk. m. sentrum z_0

(b) Taylorrk. konv. og er lik f i den største åpne disken om z_0 hvor f er anal.

Bevis:

(a) f anal. $\Rightarrow$ f ∞ deriv. $\Rightarrow$ a_n eks.

Tm. 2 $\Rightarrow$ entydighet

(b) Tm. 3 $\Rightarrow$ konv. mot f hvis $R_m(z, z_0) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

Velg $R > 0$, z s.a.

$$\{z^* : |z^* - z_0| < R\} \subset D \quad \text{og} \quad |z - z_0| < R$$

$$|R_m(z, z_0)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{|z - z_0|^{m+1}}{2\pi} \cdot \max_{|z^* - z_0| = R} \frac{|f(z^*)|}{\underbrace{|z^* - z_0|^{m+1}}_{= R^{m+1}} |z^* - z|} \cdot 2\pi R$$

(*) m. $C : |z^* - z_0| = R$

\+ ML - ulikh.

$$= \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^{m+1}}_{<1} \cdot \max_{|z^* - z_0| = R} \frac{|f(z^*)|}{\underbrace{|z^* - z|}_{>0}} \cdot R \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

siden $|z - z_0| < R$

Velg R størst mulig $\Rightarrow$ (b) $\square$