Tema

Introduksjon

Oppgaver

$\boxed{1}$ Anta du har en uendelig lang stang som er oppvarmet. Vi vet hvordan temperaturen langs stangen er på starten, $u(x,0) = f(x)$. Du vet også at både temperaturen og initialbetingelsen f har grenseverdi 0 når du går uendelig langt bort langs stangen.

Du er nå interessert i å vite hvordan denne temperaturen utvikler seg over tid, dvs. du ønsker å vite $u(x,t)$, temperaturen over hele stangen på alle mulige tidspunkt.

Gjennom modellering av varmetap får du følgende sammenheng:

$u_t = u_{xx}$

Finn $u(x,t)$ ved å løse PDE-en over med betingelsene gitt.

Steg:

a) Ta Fouriertransform med hensyn på x av hver side av PDE-en.

b) Du ender opp med en vanlig diff-likning (ODE) i t. Løs denne.

c) Bruk betingelser til å bestemme eventuelle ukjente koeffisienter.

d) Ta invers Fourier-transform for å finne løsningen i rom (ikke ω).

Bonus-spørsmål:

Hvorfor krever vi at $f, u \to 0$ når $x \to \pm\infty$?

Hva skjer om $f = \delta$, Dirac-delta?

$\boxed{2}$ Husk konvolusjonteoremet, gjengitt her:

$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \cdot h(x-v) dv = \mathscr{F}_x^{-1}(\hat{g}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega))$

Vis at løsningen til varmelikningen på en uendelig lang stang er som følger:

$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \mathrm{e}^{\frac{-(x-v)^2}{4t}}$

Hint: Bruk resultat fra forrige oppgave og konvolusjonsteoremet, hva er $\hat{g}$ og $\hat{h}$ i vårt tilfelle?

Deretter må du bruke at:

$\mathscr{F}_x(\mathrm{e}^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{\frac{-\omega^2}{4a}}$

$\boxed{3}$ Hvis du er ferdig med oppgavene over, og vil ha en utfordring: Løs 2D Laplace på uendelig stor plate (oppgave 3 fra Laplace-arket).