

Poissons likning

Oppgaver

- 1 Finn PDE-en "Poissons likning" i kontinuerlig form (ikke numerisk).

Hint: Se ert-papirene, likningen ligner på varmelikningen i 2D.

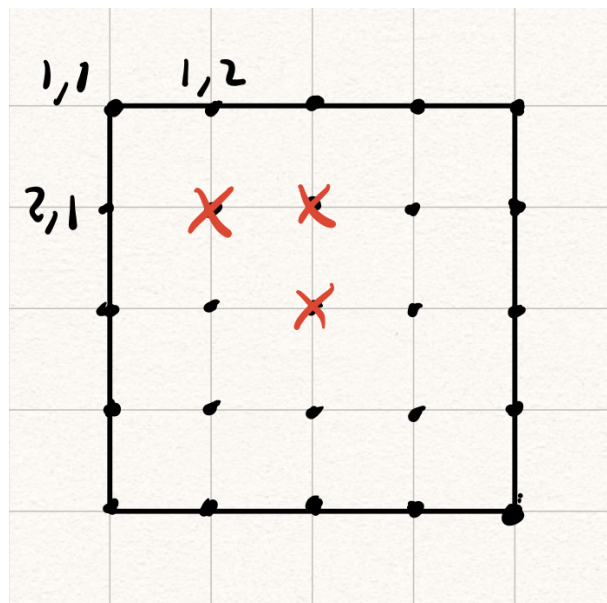
- 2 Oversett kontinuerlig form av Poissons likning til numerisk form ved å bruke definisjonen av numerisk andrederivert. Sett ikke inn et spesifikt punkt, men finn likningen for et vilkårlig punkt $(x_i, y_j) := (i, j)$. Anta det er like stor avstand mellom gitterpunktene i både x- og y-retning.

- 3 Bruk likningen vi fant i forrige oppgave, anta vi har et gitter på størrelse 5x5 (se figur 1) og at du kjenner verdien langs kantene og verdien til potensialet $f_{i,j}$ i alle punkter (i, j) .

Sett inn de følgende punktene, og samle alle ukjente verdier på venstre side av likningen, samt alle kjente verdier på høyre:

- a) $(i, j) = (3, 3)$
 b) $(i, j) = (2, 2)$
 c) $(i, j) = (2, 3)$

Diskutér også kort hvorfor det ikke gir mening å sette inn punktene $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ etc.



Figur 1: 5x5 gitter

- 4 Lat videre som at du gjør oppgave 3 for alle punktene *inne* i gitteret (altså alle punktene unntatt randene). Klarer du å sette sammenhengene du får i en matriselikning?

Hint: Prøv å sette opp $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, hvor \mathbf{A} er en matrise av tall, \vec{b} er en vektor av tall og \vec{x} er en vektor av ukjente på formen

$$\begin{bmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{3,2} \\ \dots \\ u_{4,4} \end{bmatrix}$$

- 5 Anta nå at alle kantene har verdi 0 og at $f(x_i, y_j) = 1 \forall x_i, y_j$. Implementér matrisen \mathbf{A} i MatLab, løs og plott med "surf"-funksjonen.
- 6 Eksperimentér med ulike randkrav, $f(x_i, y_j)$. Kjenner du noen potensialfunksjoner som du kan teste intuisjon mot resultatene du får? F.eks. gravitasjonskraften.
- 7 Om du har kommet så langt: Løs varmelikningen i 1D på en uendelig lang stang.