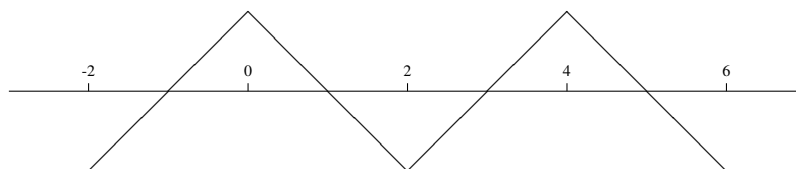


1 a)



Cosinusrekka til f blir av formen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{2} x.$$

Vi har $a_0 = 0$, og $a_n = \int_0^2 f(x) \cos n \frac{\pi}{2} x dx$. En gangs delvisintegrasjon viser at

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ like,} \\ \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2} & \text{for } n \text{ odde.} \end{cases}$$

b) Et standard argument, se Kreyszig Eksempel 4, side 604 - 605, viser at løsningen kan skrives som

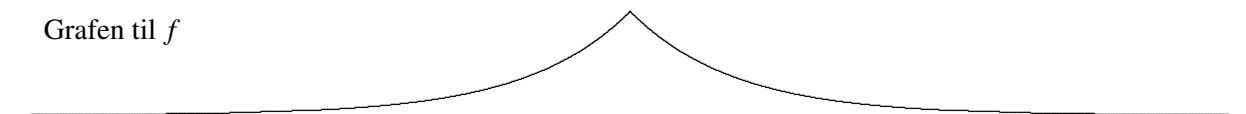
$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n \frac{\pi}{2})^2 t} \cos n \frac{\pi}{2} x.$$

Vi får oppfylt initialbetingelsen ved å velge $A_n = a_n$ som i punkt a). Altså er

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-((2k+1) \frac{\pi}{2})^2 t} \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} x.$$

2

Grafen til f



Grafen til g



Fourierinversion gir oss f og g tilbake

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{ixw} dw,$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} e^{ixw} dw.$$

Siden f og g , og derfor også \hat{f} og \hat{g} er likefunksjoner forsvinner sinusdelen og vi har

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} \cos xw \, dw,$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} \cos xw \, dw.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{(1+w^2)^2} \, dw = 0, \quad \text{fordi integranden er odde.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)^2} \, dw = \frac{2\pi}{4} g(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 w}{(1+w^2)^2} \, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2w}{(1+w^2)^2} \, dw = \frac{2\pi}{8} (g(0) + g(2)) = \frac{\pi}{4} (1 + 3e^{-2}).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-|x-v|} \, dv = (f * f)(x). \quad \text{Tar vi Fouriertransformen ser vi at}$$

$$\mathcal{F}(f * f)(w) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2} \right)^2 = \hat{g}(w), \quad \text{og følgelig er } (f * f)(x) = g(x).$$

3 a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 27(x + y),$$

på firkanten $[0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3x, \quad u(1, y) = 3y.$$

Approksimasjon av ligningen i noden (x_i, y_j) ved hjelp av sentraldifferanser, gir

$$U_{i+1}^j + U_i^{j+1} + U_{i-1}^j + U_i^{j-1} - 4U_i^j = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor $U_i^j \approx u(x_i, y_j)$, $f(x, y) = 27(x + y)$ og $x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = 1/3$.

Approksimasjon av ligningen i (x_i, y_j) , hvor $i, j \in \{1, 2\}$, gir ligningene

$$\begin{aligned} -4U_1^1 + U_1^2 + U_2^1 + 0 + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) & \text{i } (x_1, y_1), \\ -4U_2^1 + U_1^1 + U_2^2 + 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) & \text{i } (x_2, y_1), \\ -4U_1^2 + U_1^1 + U_2^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{i } (x_1, y_2), \\ -4U_2^2 + U_1^2 + U_2^1 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{i } (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$(1) \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) En iterasjon med Gauss-Seidel

$$x_j^{(1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(1)} - \sum_{k=j+1}^4 a_{jk} x_k^{(0)} \right), \quad j = 1, \dots, 4,$$

anvendt på ligningssystemet (1) i a) med startvektoren $U^{(0)} = -[1, 1, 1, 1]^T$, gir

$$\begin{aligned} (U_1^1)^{(1)} &= \frac{1}{-4} (2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ (U_2^1)^{(1)} &= \frac{1}{-4} (2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ (U_1^2)^{(1)} &= \frac{1}{-4} (2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1, \\ (U_2^2)^{(1)} &= \frac{1}{-4} (0 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -0.5. \end{aligned}$$

En iterasjon med Gauss-Seidel på systemet

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

med startvektoren $x^{(0)} = -[1, 1, 1, 1]^T$, gir

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{-5} (2.5 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1.1, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{-5} (2 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1.02, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{-5} (2 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1.02) - 1 \cdot (-1)) = -1.024, \\ x_4^{(1)} &= \frac{1}{-5} (-0.5 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1.02) - 1 \cdot (-1.024)) = -0.5288. \end{aligned}$$

De eksakte løsningene av ligningssystemene er like.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

4 a) For de tre foreslåtte fikspunktiterasjonene (på formen $x_{n+1} = g(x_n)$) sjekker vi $g'(x)$.

- For nummer 1) er $g'(x) = 3x^2$. Siden $g'(1) > 1$ og $g'(x)$ er monotont økende er $g'(x) > 1$ for $x \in I$, og vi vet da at iterasjonen ikke vil konvergere til en løsning i I , uansett startverdi $x_0 \in I$.
- For nummer 2) er $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ og $g'(1.5) < -1$. $g'(x)$ er monotont økende, og $|g'(x)| > 1$ for $x \in I$.
- For nummer 3) er $g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$. Siden $g'(1) < 1$, $g'(1.5) < 1$, og $g'(x)$ er monotont minkende, vil $|g'(x)| < 1$ for $x \in I$, og iterasjonen konvergerer for alle $x_0 \in I$. Dette er den vi bør bruke.

Utfører vi iterasjonen får vi $x_0 = 1$, $x_1 = 1.2599$, $x_2 = 1.3122$, $x_3 = 1.3223$, $x_4 = 1.3242$. Videre vil de tre første sifrene forbli uforandret, og vi kan konkludere at $s = 1.32\dots$

b) Bruker vi metoden med Newtons dividerte differanser, får vi skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 & \\ 2 & & 5 & \end{array}$$

Polynomet blir $-1 + 0 \cdot (x - 0) + 3 \cdot (x - 0)(x - 1) = 3x^2 - 3x - 1$, med nullpunkter 1.26376 og -0.26376 . Vi må velge det nullpunktet som ligger inne i intervallet, altså blir vår approksimasjon $s^* = 1.26376$.

NB: Om interpolasjonspunktene hadde ligget tettere ville vi selvsagt fått et mer nøyaktig resultat. Denne metoden er faktisk en av komponentene i matlabs *fminsearch*.

5 Vi kan lett regne ut følgende integraler (momenter)

$$\int_{-1}^1 dx = 2, \quad \int_{-1}^1 x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

Anvender vi kvadraturregelen på hver av disse integralene får vi det samme, bortsett fra i tilfellet x^4 , $((-\sqrt{1/3})^4 + (\sqrt{1/3})^4) = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5}$. På grunn av linearitet medfører dette at for alle tredjegrads-polynomer $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ vil kvadraturregelen være eksakt. Simpsons formel har også presisjonsnivå 3, men bruker én ekstra evaluering av f .

- 6
- Koden er en spesialisert implementasjon av Gausseliminasjon; Ett eliminasjonssteg i Gausseliminasjonen består i å regne ut en multiplikator (her m) og så trekke m ganger pivot-radene fra alle rader som ikke allerede er eliminert. Hvis vi antar at eliminasjonen foregår i naturlig rekkefølge $(1, 2, 3, \dots)$, vil pivotraden alltid ha to elementer, og kun en rad, raden under pivotraden, trenger å bli eliminert. Altså vil løkken over ikke-elimerte rader bli redusert til en enkelt eliminasjon, og løkken som gjør selve eliminasjonen blir redusert til en enkel subtraksjon. I dette tilfellet gjøres altså all eliminasjon på en linje, her linje 5.
 - Her skulle det stått $x(n) = b(n) / d(n)$;
 - Etter eliminasjonen vil vi bli sittende igjen med en oppdatert vektor d og en u som er urørt, som tilsammen danner den øvretriangulære matrisen

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & & \\ 0 & d_2 & u_2 & & & 0 \\ & 0 & d_3 & u_3 & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & u_{n-2} \\ 0 & & & & 0 & d_{n-1} & u_{n-1} \\ & & & & & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Dette er den reduserte matrisen. Matrisen L er nedretriangulær, og består av multiplikatorene i Gausseliminasjonen, med enere på diagonalen. Siden det kun er én eliminasjon per rad, betyr det kun en multiplikator per rad, ie. m i koden. Dersom vi skyter inn følgende kodelinje etter linje 4

$$l(k) = m;$$

vil multiplikatoren lagres i vektoren \mathbf{l} (den overskriver elementer vi er ferdige med), og vi får matrisen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ l_1 & 1 & 0 & & & 0 \\ & l_2 & 1 & 0 & & \\ & & l_3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & l_{n-2} & 1 & 0 \\ & & & & & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

L og U utgjør LU -faktoriseringen til A , $A = LU$.