Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

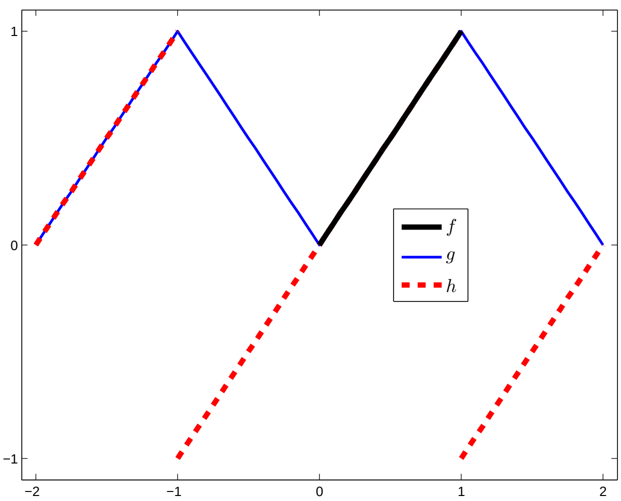
EKSAMEN I MATEMATIKK 4M (TMA4123)

21. mai 2008

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi har



Grafene til f, g og h.

Sinus-rekken til f er gitt av

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

der

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

Vi bruker delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left[x\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\
&= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Cosinusrekken til f er Fourierrekken til den like periodiske utvidelsen av f, det vil si g. Siden g er kontinuerlig i $x = 1$ får vi at summen til cosinusrekken til f er lik $g(1) = 1$. Sinurekken til f er Fourierrekken til den odde periodiske utvidelsen av f, det vil si h. Nå er h ikke kontinuerlig i $x = 1$ og vi har at summen til sinusrekken til f er lik $\frac{h(1-)+h(1+)}{2} = 0$.

b) Cosinusrekken til f er gitt av

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

der

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \;\; a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx.$$

Vi får

$$a_0 \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

og, ved hjelp av delvis integrasjon,

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left[x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\
&= 2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 && \text{siden } \sin(n\pi) = \sin(0) = 0 \\
&= 2\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} && \text{siden } \cos(n\pi) = (-1)^n.
\end{aligned}$$

Vi tar $x = 0$. I dette punktet er summen til cosinusrekken lik $g(0) = 0$ fordi g er kontinuerlig. Vi får

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} = 0 \tag{L-1}$$

Vi har

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er like} \\ -2 & \text{hvis } n \text{ er odde.} \end{cases}$$

Vi kan skrive om summen i (L-1) ved å bare ta de odde n og vi får

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{((2n+1)\pi)^2} = 0.$$

Det følger at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Oppgave 2

a) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen og får

$$G''F = F''G.$$

Det følger at

$$\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} = k$$

der k er en konstant som er uavhengig av t og x.

Vi vil løse

$$F'' = kF \tag{L-2}$$

og vi må finne randbetingelsene for (L-2). Siden $u_x(0,t) = 0$, får vi $u_x(0,t) = F'(0)G(t) = 0$ som gir $F'(0) = 0$. På samme måten får man at $F'(\pi) = 0$.

Hvis $k > 0$, er den generelle løsningen til (L-2) gitt av

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

der $\mu = \sqrt{k}$. Vi har $F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x}$, og $F'(0)$ gir $A = B$ og $F'(\pi)$ gir $\mu A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0$. Siden $\mu \neq 0$, dette fører til at $A = 0$ og vi får den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

Hvis $k = 0$, er den generelle løsningen til (L-2) gitt av

$$F(x) = Ax + B$$

Vi har $F'(x) = A$. Derfor $F'(0)$ gir $A = 0$ og da har vi også at $F'(\pi) = 0$. Derfor er $F(x) = B$ en løsning til (L-2).

Hvis $k < 0$, er den generelle løsningen til (L-2) gitt av

$$F(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

der $\mu = \sqrt{-k}$. Vi har $F'(x) = -\mu A\sin(\mu x) + \mu B\cos(\mu x)$. Derfor $F'(0)$ gir $B = 0$ og $F'(\pi) = 0$ medfører at

$$\mu B\sin(\mu\pi) = 0$$

Siden $\mu \neq 0$, får vi at $\sin(\mu\pi) = 0$ det vil si at $\mu = n$ og $k = -n^2$ for $n = 1, 2, \ldots$

Nå løser vi ligningen

$$G''(t) = kG(t)$$

For $k = 0$ får vi

$$G(t) = Bt + A.$$

For $k = -n^2$ får vi

$$G(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

Løsningene av den form $u(x,t) = F(x)G(t)$ er

$$u_0(x,t) = B_0 t + A_0$$

og

$$u_n(x,t) = (A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt))\cos(nx). \tag{L-3}$$

b) Vi tar to løsninger u og v av (1) og (2). La $w(x,t) = au(x,t)+bv(x,t)$ for to vilkårlige konstanter a og b. Ligninen (1) med randbetingelse (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet hvis w er også en løsning. Vi har

$$\begin{aligned} w_{tt} &= au_{tt} + bv_{tt} \\ &= au_{xx} + bv_{xx} \text{ siden } u \text{ og } v \text{ er løsninger til (1)} \\ &= aw_{xx} \end{aligned}$$

og w er en løsning til (1). Vi har også at

$$w_x(0,t) = au_x(0,t) + bv_x(0,t) = 0$$

og

$$w_x(\pi,t) = au_x(\pi,t) + bv_x(\pi,t) = 0.$$

Derfor w er en løsning til (1) og (2) og vi har vist at systemet som består av ligningen (1) og randbetingelsene (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet.

Ved å bruke superposisjonsprinsippet, får man den generelle løsningen til (1)-(2) som er gitt av

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(nt) + A_n \sin(nt)) \cos(nx).$$

Vi må bestemme A_n og B_n slik at u tilfredstiller startbetingelsene

$$u(x,0) = \cos^2(x) \tag{L-4}$$

og

$$u_t(x,0) = \cos(3x). \tag{L-5}$$

Vi har

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) = \cos^2(x)$$

På venstre siden har vi Cosinusrekken til $u(x,0)$. Siden $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$, får vi at

$$B_0 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{2} \text{ og } B_n = 0 \text{ hvis } n \neq 0, 2.$$

Vi har

$$u_t(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-nB_n \sin(nt) + nA_n \cos(nt)) \cos(nx)$$

som gir

$$u_t(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos(nx) = \cos(3x)$$

På venstre siden har vi nå Cosinusrekken til $u_t(x,0)$ og det fører til at

$$A_3 = \frac{1}{3}.$$

Til slutt får man løsningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3x).$$

Oppgave 3 Vi har

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{hvis } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{hvis } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} (1+x)e^{-iwx}\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)e^{-iwx}\,dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} xe^{-iwx}\,dx + \int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,dx - \int_{0}^{1} xe^{-iwx}\,dx \right) \end{aligned}$$

Ved å bruke delvis integrasjon får man at

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} xe^{-iwx}\,dx &= \left[-x\frac{e^{-iwx}}{iw} \right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{e^{-iwx}}{iw}\,dx \\ &= \left[-x\frac{e^{-iwx}}{iw} + \frac{e^{-iwx}}{w^2} \right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{e^{iw}}{iw} + \frac{1}{w^2} - \frac{e^{iw}}{w^2} \end{aligned}$$

På en tilsvarende måte får man at

$$\int_{0}^{1} xe^{-iwx}\,dx = -\frac{e^{-iw}}{iw} + \frac{e^{-iw}}{w^2} - \frac{1}{w^2}.$$

Siden

$$\int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,dx = \left[\frac{e^{-iwx}}{-iw} \right]_{-1}^{1} = -\frac{e^{-iw}}{iw} + \frac{e^{iw}}{iw},$$

får man til slutt at

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 - e^{-iw} - e^{iw}}{w^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\cos(w))}{w^2}.$$

Ved å bruke at

$$1 - \cos(w) = 2\sin^2(\frac{w}{2})$$

kan $\hat{f}$ skrives om

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin^2(\frac{w}{2})}{w^2}.$$

Nå bruker vi Teorem om Fourier transfrom og konvolusjonproduktet, og vi får

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \sqrt{2\pi}\hat{g}\cdot\hat{g}\\ &= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{4}{2\pi}\frac{\sin^2(\frac{w}{2})}{w^2}\\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\sin^2(\frac{w}{2})}{w^2}.\end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Ved å bruker tilnærmingene

$$\begin{aligned}u_{xx}(x_i,y_j) &\approx \frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}-2u_{i,j}}{h^2},\\ u_{yy}(x_i,y_j) &\approx \frac{u_{i,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}}{h^2}\end{aligned}$$

i hvert punkt (x_i, y_j) får man den følgende numeriske metoden

$$\frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}-4u_{i,j}}{h^2} = x_i u_{i,j} \tag{L-6}$$

I punktet $(x_1, y_1) = (h, h)$, siden $u_{1,0} = x_1 = h$ og $u_{0,1} = 0$, blir (L-6) til

$$\frac{u_{21}+u_{12}+h-4u_{11}}{h^2} = hu_{11}$$

som kan skrives om

$$27u_{21}+27u_{12}-109u_{11} = -9$$

der vi har brukt at $h = \frac{1}{3}$.
I punktet $(x_2, y_1) = (2h, h)$, siden $u_{2,0} = x_2 = 2h$ og $u_{3,1} = 1$, blir (L-6) til

$$\frac{1+u_{22}+u_{112}+2h-4u_{21}}{h^2} = 2hu_{21}$$

som kan skrives om

$$27u_{22}+27u_{11}-110u_{21} = -45.$$

I punktet $(x_1, y_2) = (h, 2h)$, siden $u_{1,3} = x_1 = h$ og $u_{0,2} = 0$, blir (L-6) til

$$\frac{u_{11}+u_{22}+h-4u_{12}}{h^2} = hu_{12}$$

som kan skrives om

$$27u_{22} + 27u_{11} - 109u_{12} = -9.$$

I punktet $(x_2, y_2) = (2h, 2h)$, siden $u_{2,3} = x_2 = 2h$ og $u_{3,2} = 1$, blir (L-6) til

$$\frac{2h + 1 + u_{12} + u_{21} - 4u_{22}}{h^2} = 2hu_{22}$$

som kan skrives om

$$27u_{12} + 27u_{21} - 110u_{22} = -45.$$

Til slutt, får vi det følgende systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -109\,u_{11} & + & 27\,u_{21} & + & 27\,u_{12} & & & = & -9 \\ 27\,u_{11} & - & 110\,u_{21} & + & & & 27\,u_{22} & = & -45 \\ 27\,u_{11} & & & - & 109\,u_{12} & + & 27\,u_{22} & = & -9 \\ & & 27\,u_{21} & + & 27\,u_{12} & - & 110\,u_{22} & = & -45 \end{array}$$

for $(u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22})$.

b) Gauss-Seidel metoden kan skrives som

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -109\,x_1^{(k+1)} & + & 27\,x_2^{(k)} & + & 27\,x_3^{(k)} & & & = & -9 \\ 27\,x_1^{(k+1)} & - & 110\,x_2^{(k+1)} & + & & & 27\,x_4^{(k)} & = & -45 \\ 27\,x_1^{(k+1)} & & & - & 109\,x_3^{(k+1)} & + & 27\,x_4^{(k)} & = & -9 \\ & & 27\,x_2^{(k+1)} & + & 27\,x_3^{(k+1)} & - & 110\,x_4^{(k+1)} & = & -45 \end{array}$$

Man får

$$x_1 = 0.5779 \qquad x_2 = 0.7964$$
$$x_3 = 0.4734 \qquad x_4 = 0.7207$$

Oppgave 5

a) Vi lager *Newtons divided difference interpolation* tabell

x_j	$f_j = f(x_j)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+3}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+4}]$
0	1				
		5			
0.25	2.25		12		
		11		16	
0.5	5		24		0
		23		16	
0.75	10.75		36		
		41			
1	21				

og man får

$$P(x) = 1 + 5x + 12x(x - 0.25) + 16x(x - 0.25)(x - 5)$$

som forenkler seg til

$$P(x) = 16x^3 + 4x + 1.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 (16x^3 + 4x + 1)\,dx \\ &= \left[16\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= 7.\end{aligned}$$

Simpsons regel gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx \approx S_n &= \frac{\Delta x}{3}(P(0) + 4P(0.25) + 2P(0.5) + 4P(0.75) + P(1)) \\ &= \frac{0.25}{3}(1 + 4 \cdot 2.25 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 10.75 + 21) \\ &= 7.\end{aligned}$$

Feilestimat for feilen er gitt av

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leq \frac{f^4(c)(b-a)^5}{180n^2}$$

for noen $c \in [0, 1]$. Siden P har graden 3 har vi $P^{(4)}(x) = 0$. Det vil si at feilen blir null for P . Den *degree of precision* til Simpsons metode er lik 3 og metoden gir den eksakte verdien av integralet til P.

Oppgave 6 Vi vil løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx}.$$

Vi må ha startbetingelser:

$$u(x, 0) = f(x)$$

og randbetingelser:

$$\begin{aligned}u(0, t) &= b_1(t) && \text{(på venstre siden)} \\ u(1, t) &= b_2(t) && \text{(på høyre siden).}\end{aligned}$$

Her løser vi ligningen for $x \in [0,1]$ som i Matlab-koden.

Vi lager en gitter $x_i = ih$ for $i = 0, \dots, N$, $t_j = jk$ og lar $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$. Vi bruker at

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

og

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2},$$

og, ved å sette dette inn i ligningen, får man

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}),$$

der $r = \frac{k}{n^2}$, som kan skrives om til

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j}. \tag{L-7}$$

Ved å bruke vektor notasjon og la

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix}$$

blir (L-7) til

$$\mathbf{u}_{j+1} = A\mathbf{u}_j + \mathbf{b}_j \tag{L-8}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ r & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r \\ 0 & \dots & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} rb_1(t_j) \\ \vdots \\ rb_2(t_j) \end{pmatrix}.$$

I Matlab-koden, linjer 1-6, setter man første verdier for konstantene N, T, k og r som blir brukt i metoden. Etterpå, l.8-16, bygger man matrisen A. På l.18-19, setter man startbetingelsen lik

$$u(x,0) = \cos(\frac{\pi x}{2})$$

og på l.21-22 setter man randbetingelsene like

$$b_1(t) = 1 \text{ og } b_2(t) = 0.$$

Man lagrer $\mathbf{u}_j$ i Matlab-vektoren `u(:,j)`. På l.25-27 utfør man iterasjonene som tilsvarer (L-8) og regner løsningen u for hvert tidskritt $t_j = jk$ for $j = 1, \dots, M$.