Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelark

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23
mobil 916 34 712

EKSAMEN I TMA4122 MATEMATIKK 4M

Bokmål
Mandag 15. desember 2008
kl. 09–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12. januar 2009.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Funksjonen f er definert ved at følgende betingelser er oppfylt.

i) $f(x) = f(-x)$ for alle reelle x.

ii) $f(x) = f(x+4)$ for alle reelle x.

iii) $f(x) = 1 - x$ for $0 < x < 2$.

a) Skisser grafen til f for $-2 < x < 6$, og finn Fourier-cosinusrekka til f.

b) Løs varmeligningen $u_t = u_{xx}$ i området $0 < x < 2$ og $t > 0$ med randverdiene $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$ og initialbetingelsen $u(x,0) = 1 - x$ for $0 < x < 2$.

Oppgave 2 Funksjonene f og g er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for} \quad x > 0, \\ e^{x} & \text{for} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{for} \quad x > 0, \\ (-x+1)e^{x} & \text{for} \quad x < 0. \end{cases}$$

Det oppgis at Fouriertransformene er

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2} \qquad \text{og} \qquad \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{(1+w^2)^2}.$$

a) Tegn skisse av grafene til f og g, og bruk Fourier-inversjon til å finne verdiene av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{(1+w^2)^2}\, dw, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)^2}\, dw \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 w}{(1+w^2)^2}\, dw.$$

Hint: $\cos 2w = 2\cos^2 w - 1$.

b) Finn et eksplisitt uttrykk for konvolusjonsintegralet

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-|x-v|}\, dv = (f * f)(x).$$

Oppgave 3

a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 27(x+y),$$

på firkanten $[0,1] \times [0,1]$ med randbetingelser

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 3x, \quad u(1,y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen $u(x,y)$ ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere u_{xx} og u_{yy}. La $h = 1/3$ være skrittlengden, og la gitteret være gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, \ldots, 3$. Sett opp et system av ligninger for $U_1^1, U_2^1, U_1^2, U_2^2$, der $U_i^j \approx u(x_i, y_j)$

b) Utfør én Gauss-Seidel-iterasjon på systemet du fikk i oppgave a). Hvis du ikke fikk til oppgave a), bruk systemet

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Bruk startvektoren $\boldsymbol{x}^{(0)} = -[1,1,1,1]^T$ i begge tilfellene.

Oppgave 4 Tredjegradspolynomet

$$p(x) = x^3 - x - 1,$$

har en rot s som ligger i intervallet $I = [1, 1.5]$.

a) Gitt følgende tre fikspunktiterasjoner,

$$\begin{array}{lll} 1) & x_{n+1} & = x_n^3 - 1 \\ 2) & x_{n+1} & = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \\ 3) & x_{n+1} & = \sqrt[3]{x_n + 1}. \end{array}$$

Hvilken av disse ville du valgt for å finne s? Begrunn svaret. Bruk iterasjonen med startverdi $x_0 = 1$ og regn ut s med tre korrekte siffer.

b) En alternativ måte å approksimere s på er å først approksimere $p(x)$ med et andregradspolynom, for så å finne nullpunkt til dette med andregradsformelen. Finn denne approksimasjonen til s når andregradspolynomet konstrueres ved å interpolere $p(x)$ i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$.

Oppgave 5 Vis at kvadraturregelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}\Big),$$

har presisjonsnivå 3, dvs. den er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 3. Hva er presisjonsnivået til Simpsons metode?

Oppgave 6 *Matlaboppgave*

Du skal løse ligningen $Ax = b$ hvor A er tridiagonal, dvs den er på formen

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & & & \\ l_1 & d_2 & u_2 & & & 0 & \\ & l_2 & d_3 & u_3 & & & \\ & & l_3 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & u_{n-2} & \\ & 0 & & & l_{n-2} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ & & & & & l_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

En småtvilsom numeriker med langt hår og skjegg serverer deg følgende matlabkode som skal løse ligningen:

```
1-  function x = tridiagsolver(d,l,u,b)
2-  n  = length(d);
3-  for k=1:n-1
4-      m      = l(k)/d(k);
5-      d(k+1) = d(k+1) - m*u(k);
6-      b(k+1) = b(k+1) - m*b(k);
7-  end
8-
9-  x = zeros(n,1);
10- x(n) = b(n);
11- for k=n-1:-1:1
12-     x(k) = (b(k) - u(k)*x(k+1))/d(k);
13- end
```

Den tvilsome numerikeren stikker av uten å forklare hva koden gjør, bortsett fra å si at alle innverdiene til koden er vektorer. Dessuten har du grunn til å tro at det er forglemmelser i koden.

Svar på følgende tre spørsmål:

- Dette er et forsøk på en spesialisert implementasjon av en kjent metode for å løse lineære ligninger. For tridiagonale systemer kan nemlig denne metoden gjøres mye enklere. Hvilken metode er det snakk om, og hva består forenklingen i?
- Det er faktisk bare en feil i koden, og den er på linje 10. Hva skulle stått her?
- Med en ørliten modifikasjon kan koden også gi deg LU-faktoriseringen til A. Beskriv hva som må gjøres, enten med egne ord eller kode, og forklar hvordan matrisene L og U blir seende ut.