



Faglig kontakt under eksamen:

Finn Knudsen 73 59 35 23 916 34 712

Andreas Asheim 73 59 35 27

EKSAMEN I MATEMATIKK 4M (TMA4122/23)

Mandag 10. august 2009

Tid: 15:00 – 19:00

Sensur 31. august 2009

BOKMÅL

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Beregn Fouriercosinusrekka til funksjonen f definert ved,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

b) Finn løsningen av rand- og initialverdiproblemet

(1) $u_t = u_{xx}$ (den éndimensjonale varmeligningen),

(2) $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$ for $t \geq 0$,

(3) $u(x, 0) = f(x)$ for $0 < x < 2$,

når det oppgis at alle funksjoner av formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (1) og (2) er enten en konstant eller en konstant ganger funksjonen $u_n(x, t) = e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \cos n\frac{\pi}{2}x$, for $n = 1, 2, 3, \dots$

- c) Finn alle løsningene av ligning (1) av formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

$$(4) \quad u(0, t) = u_x(2, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

Oppgave 2 Bruk Fouriertransformasjonen til å beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} du.$$

Oppgave 3

- a) Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$(5) \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1, \end{aligned}$$

med initialbetingelsen

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Finn en tilnærming til løsningen av systemet (5) $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$, når $t = 0.2$, ved bruk av den implisitte trapesmetoden, gitt av

$$(6) \quad \mathbf{y}^{(i+1)} = \mathbf{y}^{(i)} + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}^{(i)}) + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}^{(i+1)})], \quad t_i = t_0 + ih.$$

Bruk $h = 0.2$, dvs $\mathbf{y}^{(1)} \approx \mathbf{y}(0.2)$.

- b) Vis at for systemet (5), med de gitte initialbetingelsene, er

$$\|\mathbf{y}(t)\|_2 = 1, \quad \text{for } t \geq 0$$

hvor $\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Dvs. lengden $\|\mathbf{y}\|_2$ er konstant lik en.

- c) Vis at

$$\|\mathbf{y}^{(i+1)}\|_2 = \|\mathbf{y}^{(i)}\|_2, \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots,$$

der $\mathbf{y}^{(i)}$ er gitt av trapesmetoden (6) anvendt på ligningssystemet (5). Dvs. trapesmetoden bevarer lengden, $\|\mathbf{y}^{(i)}\|_2$.

Hint:

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 + h^2} \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4 Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x' &= e^y - x, \\y' &= x + y,\end{aligned}$$

med initialbetingelsen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Bruk Heuns metode til å finne en tilnærming til $x(t)$, $y(t)$, når $t = 0.5$. Bruk $h = 0.5$.

Oppgave 5 Beregn kondisjonstallet til matrisen A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

med hensyn på Frobeniusnormen:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2}.$$

Hint: A^{-1} vil ha samme struktur som A .