Oppgave 1

a)

La $f(x) = x(\pi - x)$, for $0 \le x \le \pi$. Det oppgis at Fourier-sinus rekka til $f(x)$ er

$$\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}.$$

Hva er summen til rekka

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{11^3}-\frac{1}{13^3}-\frac{1}{15^3}+.... \ ?$$

b)

For $0 \le x \le \pi,\ t \ge 1$, er randverdiproblemet

$$t\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

gitt. Finn alle løsninger av randverdiproblemet på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$.

Hint: Ligninga for $G(t)$ blir en separabel differensialligning (dvs. kan skrives på formen $a(G)dG = b(t)dt$).

c)

Finn løsningen på randverdiproblemet som også oppfyller initialverdibetingelsen

$$u(x,1) = x(\pi - x).$$

Oppgave 2

La $f(x) = 1$ for $0 < x < 1$, $f(x) = -1$ for $-1 < x < 0$, og $f(x) = 0$ for $|x| > 1$. Det oppgis at Fourier-transformasjonen til $f(x)$ er

$$\hat{f}(\lambda) = -i2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \qquad \text{(der } i = \sqrt{-1}\text{)}.$$

Bruk Fourier-integralet til å beregne

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 w}{w}\,dw.$$

Oppgave 3

Finn polynomet av lavest mulig grad som går gjennom punktene $(0,2),(1,1),(3,1),(4,-2)$. Du kan bruke den metoden du ønsker.

Oppgave 4
a)
Ta utgangspunkt i $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}]$, og utfør en iterasjon med Gauss-Seidel på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= 1 \\ -x + \tfrac{15}{4}y + \tfrac{3}{4}z &= \tfrac{7}{4} \\ x + \tfrac{5}{4}y - \tfrac{9}{2}z &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

b)
Skriv ligningsystemet i oppgave 4a) som $Ax = b$. Finn en nedre triangulær matrise L med enere på diagonalen og en øvre triangulær matrise U slik at $A = LU$, og bruk dette til å løse ligningsystemet $Ax = b$ gitt i oppgave 4a).

Oppgave 5
a)
Skriv

$$y'' + y' + xy = 0$$

som et system $y' = f(x, y)$ av 1.ordens differensialligninger. La steglengden være $h = 0.2$ og anta $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Bruk baklengs (implisitt) Euler for å estimere $y(0.2)$.

b)
Vi ser på Heuns metode (forbedret Euler) for problemet

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

La $y_0 = y(0) = 1$, og la y_n være estimatet for $y(x_n)$ med gitt steglengde $h > 0$. For hvilke h vil $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?

Oppgave 6
La $0 \le x \le 1,\ t \ge 0$. Gitt initialverdiproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin \pi x.$$

Bruk Crank-Nicholsen med $\Delta x = h = \frac{1}{3}$ og $\Delta t = k = \frac{1}{9}$ for å estimere $u(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$ og $u(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$.