

Løsningsforslag eksamen i TMA4122 Matematikk 4M

Mandag 20. desember 2010

Oppgave 1

Lagrangeinterpolasjon:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3.0 \frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-1-1)(-1-2)} + 0.5 \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} \\ &\quad - 1.0 \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} - 1.5 \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} \\ &= -\frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 - 2x) - \frac{1}{4}(x^3 - x) \\ &= 0.5x^2 - 2.0x + 0.5 \end{aligned}$$

Newton's interpolasjonsformel:

Tabellen over dividerte differenser er gitt ved

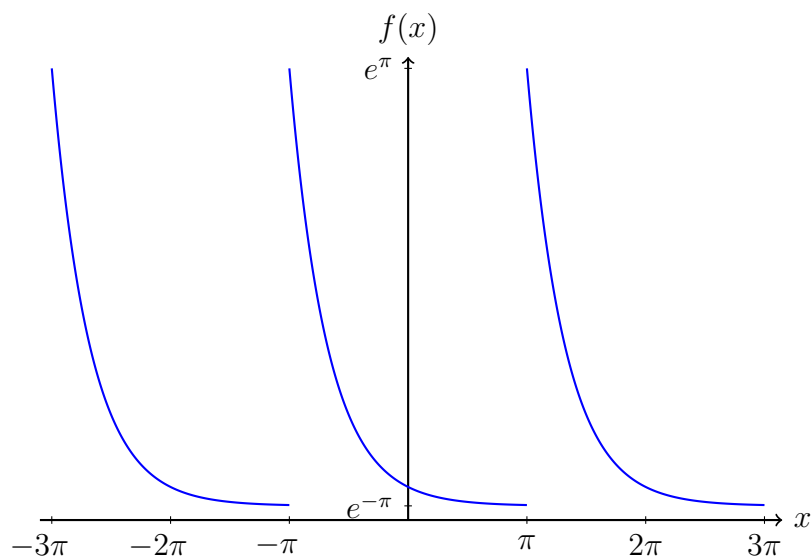
x_i	$f[x_i]$
-1.0	3.0
	-2.5
0.0	0.5
	-1.5
1.0	-1.0
	-0.5
2.0	-1.5

så interpolasjonspolynomet blir

$$\begin{aligned} p(x) &= 3.0 - 2.5(x+1.0) + 0.5(x+1.0)x + 0.0(x+1.0)x(x-1.0) \\ &= 0.5x^2 - 2.0x + 0.5. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Grafen til den 2π -periodiske utvidelsen til $f(x)$ er gitt ved figuren under.



Den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

der

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{1+in} e^{-(1+in)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{1+in} e^{-\pi} e^{-in\pi} + \frac{1}{1+in} e^{\pi} e^{in\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+in} (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+in}. \end{aligned}$$

Altså er den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ gitt ved

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{inx}.$$

b) Ettersom $f(x)$ er kontinuertlig i $x = 0$ får vi

$$f(0) = 1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right)$$

Siden

$$\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} = \frac{2}{1+n^2}$$

ender vi med at

$$f(0) = 1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 - 1 + 2 \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right)$$

eller

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi}.$$

Ettersom $f(x)$ har et sprang i $x = \pi$ får vi, siden $e^{in\pi} = (-1)^n$, at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)] &= \cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} (-1)^n = \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right) \\ &= \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right), \end{aligned}$$

slik at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi} - 1 = \frac{\pi}{2 \tanh \pi} - 1.$$

Oppgave 3 Integralligningen kan skrives på formen

$$f(x) - (f * g)(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{-4|x|}. \quad (*)$$

La så $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$. Fourier-transformerer så (*). Det gir

$$\hat{f}(w) - \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{w^2 + 16} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2 + 1},$$

det vil si

$$\left(1 - \frac{8}{w^2 + 16} \right) \hat{f}(w) = \frac{w^2 + 8}{w^2 + 16} \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2 + 1}.$$

Altså har vi at

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w^2 + 16}{(w^2 + 1)(w^2 + 8)}.$$

Delbrøkkoppspalting gir så

$$\begin{aligned} \frac{w^2 + 16}{(w^2 + 1)(w^2 + 8)} &= \frac{1}{w^2 + 1} + \frac{8}{(w^2 + 1)(w^2 + 8)} = \frac{1}{w^2 + 1} + \frac{8}{7} \left(\frac{1}{w^2 + 1} - \frac{1}{w^2 + 8} \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{15}{w^2 + 1} - \frac{8}{w^2 + 8} \right). \end{aligned}$$

Finne så $f(x)$ ved å ta inverstransformasjonen, det vil si

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{7} \left(15e^{-|x|} - \frac{8}{2\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}|x|} \right) = \frac{1}{7} (15e^{-|x|} - 2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}|x|}).$$

Oppgave 4

a) Setter inn $u(x, t) = X(x)T(t)$ i $u_t = u_{xx} + 2u$. Det gir

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) + 2X(x)T(t) \quad \text{det vil si} \quad X''(x)T(t) = X(x)(\dot{T}(t) - 2T(t)),$$

slik at

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_k = \underbrace{\frac{\dot{T}(t) - 2T(t)}{T(t)}}_k.$$

Dette gir følgende to 2. ordens ordinære differensialligninger

$$X''(x) - kX(x) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{T}(t) - (k + 2)T(t) = 0. \tag{2}$$

Løser så (1), gitt randbetingelsene $u_x(0, t) = 0$ og $u_x(\pi, t) = 0$, det vil si $X'(0) = 0$ og $X'(\pi) = 0$. Med andre ord,

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0. \tag{1'}$$

Vi har tre muligheter for k :

(i) $k = p^2 > 0$: Innsatt for $k = p^2$ i (1') får vi

$$X''(x) - p^2X(x) = 0.$$

Denne ligningen har løsning

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Ettersom

$$X'(x) = p(Ae^{px} - Be^{-px}),$$

gir $X'(0) = 0$ at $A = -B$. Fra $X'(\pi) = 0$ får vi

$$X'(\pi) = Ap(e^{p\pi} - e^{-p\pi}) = 2Ap \sinh p\pi = 0.$$

Altså må $A = 0$. Dermed står vi kun igjen med den trivielle løsningen $u(x, t) = 0$. Altså er $k \leq 0$.

(ii) $k = 0$: Innsatt for $k = 0$ i (1') får vi

$$X''(x) = 0,$$

som har løsning $X(x) = Ax + B$. Fra $X'(0) = 0$ og $X'(\pi) = 0$ får vi $A = 0$. Altså står vi igjen med løsningen $X(x) = \text{konstant}$.

(iii) $k = -p^2 < 0$: Innsatt for $k = -p^2$ i (1') får vi

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0,$$

som har løsning

$$X(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Ettersom

$$X'(x) = p(B \cos px - A \sin px),$$

får vi at $X'(0) = Bp = 0$, det vil si $B = 0$. Altså har vi at $X(x) = A \cos px$. Fra $X'(\pi) = 0$, får vi

$$X'(\pi) = -pA \sin p\pi = 0.$$

Ettersom $A = 0$ kun gir den trivelle løsningen $u(x, t) = 0$, ser vi på tilfellet der $\sin p\pi = 0$. Det gir $p = n = 1, 2, 3, \dots$. Altså er $k = -n^2$.

Ved å kombinere (ii) og (iii) har vi funnet at alle mulige løsninger for (1'), gitt våre randbetingelser, er på formen

$$X_n(x) = \tilde{A}_n \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Setter så inn for $k = -n^2$ i (2). Det gir

$$\dot{T}(t) + (n^2 - 2)T(t) = 0 \quad \text{det vil si} \quad \dot{T}(t) = (2 - n^2)T(t),$$

som har løsning

$$T_n(t) = C_n e^{(2-n^2)t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Altså er alle løsninger på formen $u(x, t) = X(x)T(t)$, som tilfredstiller $u_t = u_{xx} + 2u$ og de gitte randbetingelsene, gitt ved

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{(2-n^2)t} \cos nx.$$

b) Legg merke til at $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, slik at

$$u(x, 0) = (\cos x + 1)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = \frac{3}{2} + 2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

De løsningene vi fant i oppgave **a)** som i tillegg tilfredstiller initialbetingelsen gitt over, er da gitt ved

$$u(x, t) = \frac{3}{2}e^{2t} + 2e^t \cos x + \frac{1}{2}e^{-2t} \cos 2x.$$

Oppgave 5 La $y_1 = y$ og $y_2 = y'$. Da blir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= \pi/2, \\ y_2' &= \sin(y_2), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Et skritt med trapesmetoden på denne ligningen er gitt ved

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + \frac{h}{2}(y_{2,n} + y_{2,n+1}), \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + \frac{h}{2}(\sin y_{1,n} + \sin y_{1,n+1}). \end{aligned}$$

Med $h = 0.1$, $n = 0$ og $y_{1,0} = \pi/2$, $y_{2,0} = 0$ blir dette

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{20}y_{2,1} & \text{eller} & & 20y_{1,1} - y_{2,1} - 10\pi &= 0 \\ y_{2,1} &= \frac{1}{20}(1 + \sin y_{1,1}) & & & \sin y_{1,1} - 20y_{2,1} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 6 Her er

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ \cos(x_1) & -20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20x_1 - x_2 - 10\pi \\ \sin(x_1) - 20x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Med oppgitte startverdier blir $J(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ til

$$\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

med løsning $\Delta x_2 = 1/10 = 0.1$ og $\Delta x_1 = 1/200 = 0.005$. Dermed blir

$$x_1^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{200} = 1.5758, \quad x_2^{(1)} = 0.1000.$$

Oppgave 7 Differanseskjemaet blir for $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \kappa \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + x_i(1 - x_i)$$

eller

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \kappa \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + kx_i(1 - x_i),$$

for $i = 1, 2, \dots, N - 1$, og $j = 0, 1, 2, \dots$, og med

$$U_{i,0} = \sin(\pi x_i) = \sin(i\pi h), \quad U_{0,j} = U_{N,j} = 0.$$

Med $\kappa = 0.1$, $h = 0.25$ og $k = 0.2$ blir dette ($x_i = 0.25i$)

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + 0.32(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 0.05i(1 - 0.25i).$$

Med startverdiene

$$U_{0,0} = 0, U_{1,0} = \sin(\pi/4) = 0.70711, U_{2,0} = \sin(\pi/2) = 1, \\ U_{3,0} = \sin(3\pi/4) = 0.70711, U_{4,0} = \sin(\pi) = 0$$

ender vi med

$$u(0.25, 0.2) \approx U_{1,1} = 0.6121, \\ u(0.5, 0.2) \approx U_{2,1} = 0.8625, \\ u(0.75, 0.2) \approx U_{3,1} = 0.6121.$$

Oppgave 8

a) Simpsons formel

b)

$$h = 0.25, \\ x = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0] \\ y = [e^0, e^{0.25^2}, e^{0.5^2}, e^{0.75^2}, e^1] \\ s_0 = e^0 + e^1 = 3.718282 \\ s_1 = e^{0.25^2} + e^{0.75^2} = 2.819549 \\ s_2 = e^{0.5^2} = 1.284025 \\ Q = 1.463711$$

så $Q_1 = 1.463711$.

Feilestimering: Vi har

$$m = 2, \quad I - Q_1 \approx C/2^4, \\ m = 4, \quad I - Q_2 \approx C/4^4,$$

Her er I og C ukjent. Multipliserer vi siste uttrykk med 2^4 og trekker dem fra hverandre får vi

$$(1 - 2^4)I - (Q_1 - 2^4 Q_2) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad I \approx Q_2 + \frac{1}{15}(Q_2 - Q_1).$$

så feilen i Q_2 er omtrent gitt ved

$$I - Q_2 \approx \frac{Q_2 - Q_1}{15} = -6.6 \cdot 10^{-5}.$$