Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag eksamen i TMA4123/25 Matematikk 4M/N

Mandag 21. mai 2012

TMA4123 Matematikk 4M; Alt unntatt oppgave 5 (Laplace).
TMA4125 Matematikk 4N: Alt unntatt oppgave 8 og 9 (Matlab).

Oppgave 1

Lagrange interpolasjon:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= f(1)\frac{(x-1.5)(x-2)}{(1-1.5)(1-2)} + f(1.5)\frac{(x-1)(x-2)}{(1.5-1)(1.5-2)} + f(2)\frac{(x-1)(x-1.5)}{(2-1)(2-1.5)} \\
&= 2x^2 - 7x + 6 + \frac{2}{3}(-4x^2 + 12x - 8) + \frac{1}{2}(2x^2 - 5x + 3) \\
&= \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{6}.
\end{aligned}
$$

Newton interpolasjon:

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_i & f(x_i) & & \\
\hline
1 & 1 & & \\
 & & -2/3 & \\
3/2 & 2/3 & & 1/3 \\
 & & -1/3 & \\
2 & 1/2 & &
\end{array}
$$

og

$$p_2(x) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{6}.$$

Til sist bruker vi

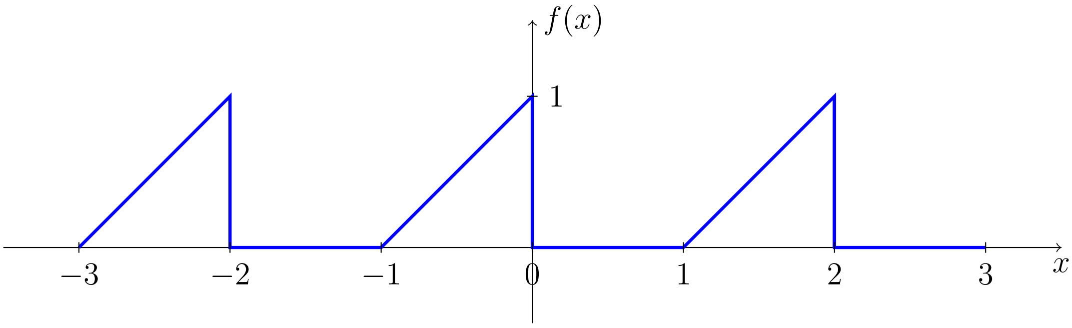
$$\int_1^2 f(x)dx \approx \int_1^2 p_2(x)dx = \frac{25}{36}.$$

Ikke en del av oppgaven: Den feilen som blir gjort her er altså

$$\int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 p_2(x)dx = \ln 2 - \frac{25}{36} = -1.2 \cdot 10^{-3}$$

Oppgave 2

a) Skisse:



Fourierkoeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \int_{1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0}(1+x)\cos(n\pi x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\big(\cos(n\pi x) + n\pi x\sin(n\pi x)\big)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n^2\pi^2}\big(1-(-1)^n\big),$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0}(1+x)\sin(n\pi x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\big(\sin(n\pi x) - n\pi x\cos(n\pi x)\big)\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{n\pi}.$$

Fourierrekka:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right).$$

b) Sett inn $x = 0$, og vi får at

$$\frac{1}{2}\big(f(0^+) + f(0^-)\big) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} = \frac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{(2m+1)^2\pi^2}$$

og

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sett inn $x = 1/2$ slik at

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

Det første leddet i summen er null, siden $1-(-1)^n = 0$ når n er et partall, og $\cos(n\pi/2)$ er null når n er et oddetall. For det siste leddet har vi at $\sin(n\pi/2)$

er 0 når n er et partall, mens det er $(-1)^{(n-1)/2}$ når n er et oddetall. Dermed har vi at

$$0 = \frac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 3

a) (Dette punktet teller dobbelt).
Separasjon av variable:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

som innsatt i ligningen gir

$$F \cdot \ddot{G} = 4F'' \cdot G \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F''}{F} = \frac{1}{4}\frac{\ddot{G}}{G} = k$$

for en foreløbig helt ukjent konstant k. I tillegg har vi at

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F'(0) = 0, \quad F(2) = 0. \tag{1}$$

Løser ligningen

$$F'' = kF \tag{2}$$

som har tre mulige løsninger:

- $k = \lambda^2 > 0$:

$$F(x) = Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} \qquad \text{og dermed} \qquad F'(x) = C\lambda e^{\lambda x} - D\lambda e^{-\lambda x}.$$

Setter inn randbetingelsene:

$$\begin{aligned} F'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C - D = 0 \\ F(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad Ce^2 + De^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(e^2 - e^{-2}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad C = D = 0. \end{aligned}$$

og $F(x) = 0$ (triviell løsning)

- $k = 0$:

$$F(x) = C + Dx \qquad \text{og dermed} \qquad F'(x) = D.$$

Setter inn randbetingelsene:

$$\begin{aligned} F'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad D = 0 \\ F(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2C = 0 \end{aligned}$$

og $F(x) = 0$ (triviell løsning).

- $k = -\alpha^2 < 0$:

  $$F(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) \qquad \text{og dermed} \qquad F'(x) = -A\alpha\sin(\alpha x) + B\alpha\cos(\alpha x).$$

  Setter inn randbetingelsene og får:

  $$F'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\alpha = 0$$
  $$F(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(\alpha \cdot 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Så alle mulige løsninger av (2) og (1) er på formen $F(x) = \cos(\alpha_n x)$ med $\alpha_n = (2n+1)\pi/4$.
Løser nå ligningen ($k = -\alpha_n^2$):

$$\ddot{G} = -4\alpha_n^2 G$$

som har løsningene:

$$G(t) = A_n\cos(2\alpha_n t) + B_n\sin(2\alpha_n t).$$

Vi får da at alle løsninger av (1a) og (1b) på formen $G(t)F(x)$ er gitt ved

$$A_n\cos(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x) \quad \text{og} \quad B_n\sin(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x), \qquad \alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

for vilkårlige konstanter A_n og B_n, men med Den generelle løsningen er

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(A_n\cos(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x) + B_n\sin(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x)\big)$$

og dermed

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(-A_n 2\alpha_n\sin(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x) + B_n 2\alpha_n\cos(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x)\big)$$

Fra startbetingelsen $u_t(x,0) = 0$ får vi at $B_n = 0$, slik at

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos(\alpha_n x) = A_0\cos\big(\frac{\pi}{4}x\big) + A_1\cos\big(\frac{3\pi}{4}x\big) + A_2\cos\big(\frac{5\pi}{4}x\big) + \cdots .$$

Ved å sammenligne med den oppgitte startbetingelsen $u(x,0) = 2\cos(\pi x/4) + \cos(5\pi x/4)$ ser vi at $A_0 = 3$, $A_2 = 1$ og $A_n = 0$ for $n \neq 0, 2$. Løsningen blir dermed

$$u(x,t) = 3\cos\big(\frac{\pi t}{2}\big)\cos\big(\frac{\pi x}{4}\big) + \cos\big(\frac{5\pi t}{2}\big)\cos\big(\frac{5\pi x}{4}\big).$$

b) Vi har oppgitt at $v(x,t) = u(x,t) + g(x)$, slik at $v_{tt} = u_{tt}$ og $v_{xx} = u_{xx} + g_{xx}$. Sett dette inn i ligningen,

$$u_{tt} = u_{xx} + g_x x, \qquad u_x(0,t) + g_x(0) = 1, \qquad u(2,t) + g(2) = 0.$$

Siden $u(x,t)$ er en løsning av (1a), (1b) i punkt **a)**, må $g(x)$ tilfredstille

$$g_{xx} = 0, \qquad g_x(0) = -1, \quad g(2) = 0,$$

slik at

$$g(x) = 2 - x.$$

Den generelle løsningen av dette problemet er gitt ved $v = u + g$, eller, som vi setter inn den generelle løsningen $u(x,t)$ fra **a)**

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_n \cos(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x) + B_n \sin(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x)\big) + 2 - x.$$

Siden $v_t(x,0) = 0$ må $B_n = 0$. Siden $v(x,0) = 0$ må

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n x) &= A_0 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + A_1 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + A_2 \cos\left(\frac{5\pi x}{4}\right) + \cdots \\ &= -g(x) = x - 2,\end{aligned} \tag{3}$$

der $\alpha_n = (2n+1)\pi/4$. Vi trenger altså å uttrykke $x - 2$ for $0 < x < 2$ som en cosinusrekke, og gjennom det finne et uttrykk for A_n. Sagt på en annen måte: Vi trenger en periodisk, like utvidelse av -$g(x)$, la oss kalle den $h(x)$, slik at

$$h(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

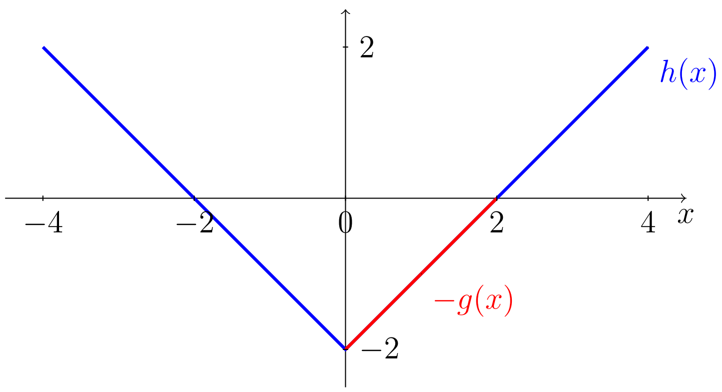
og

$$h(x) = 2 - x \text{ for } 0 < x < 2.$$

Ved å sammenligne dette med (3) kan vi trekke følgende konklusjoner:

1. $L = 4$ (periode 8).
2. $a_0 = 0$, dvs. $\int_0^4 h(x)dx = 0$.
3. $a_m = 0$ når m er et partall.

Skissen under viser hvordan $h(x)$ kan se ut, dvs. at $h(x)$ er den like, 8-periodiske utvidelsen av funksjonen $x - 2$, $0 < x < 4$.



Dette valget av $h(x)$ tilfredstiller også

$$a_m = \frac{1}{2}\int_0^4 (x-2)\cos\big(\frac{m\pi x}{4}\big)dx = 0 \text{ for } m \text{ partall}$$

fordi bidraget til integralet fra 0 til 2 er like stort, men med motsatt fortegn som bidraget fra 2 til 4. Setter vi helt til sist $m = 2n+1$ får vi rekka (3) med

$$A_n = a_{2n+1} = \frac{1}{2}\int_0^4 (x-2)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{4}dx.$$

Oppgave 4 Ligningen kan skrives på formen:

$$y(x) * e^{-2x^2} = e^{-x^2}. \tag{4}$$

Fouriertransformerer denne:

$$\sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}(y)\cdot\mathcal{F}(e^{-2x^2}) = \mathcal{F}(e^{-x^2}) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2\pi}\cdot\hat{y}(w)\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{w^2}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{y}(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{w}{8}}$$

og

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{y}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2x^2}.$$

Oppgave 5

a) Delbrøksoppspalting:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}$$

og

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}.$$

Dessuten har vi at

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{s^2}F(s)\right\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t\int_0^\tau f(u)du\, d\tau\right\}$$

slik at

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-s-2)}\right\} &= \frac{1}{3}\int_0^t\int_0^t (e^{2u}-e^{-u})du\, d\tau \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\tau \left(\frac{1}{2}e^{2\tau} + e^{-\tau} - \frac{3}{2}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

b) Gitt differensialligningen

$$y''' - y'' - 2y' = 1 - u(t-2), \quad \text{for } t \geq 0.$$

med startverdiene $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 0$. Laplacetransformerer ligningen:

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - s^2Y(s) + sy(0) + y'(0) - 2Y(s) + 2sy(0) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}).$$

Setter inn startverdiene:

$$(s^3 - s^2 - 2s)Y(s) - 2(s^2 - s - 2) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$$

eller

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - s - 2)}(1 - e^{-2s}) + \frac{2}{s}$$

ved å bruke resultatet fra punkt **a)** finner vi

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + 2 - \left(\frac{1}{12}e^{2(t-2)} - \frac{1}{3}e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}(t-2) + \frac{1}{4}\right)u(t-2) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{9}{4} & \text{for } 0 \leq t < 2 \\ \frac{e^{2t}}{12}(1 - e^{-4}) - \frac{e^{-t}}{3}(1 - e^{2}) + 1 & \text{for } t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Oppgave 6

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{5}(6 + y^{(0)} - 2z^{(0)}) = 0.6 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{4}(5 - 2x^{(1)} + z^{(0)}) = 1.45 \\ z^{(1)} &= \frac{1}{3}(4 - x^{(1)}) = 1.1333 \end{aligned}$$

Iterasjonene konvergerer siden systemet er diagonaldominant.

Oppgave 7 Vi har altså gitt følgende system av differensialligninger:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -yw \\ y^2 - w \end{pmatrix}.$$

Og da er det bare å bruke Heun's metode som oppgitt på formelarket:

$$\mathbf{k_1} = h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = 0.2\begin{pmatrix} -1 \cdot 0 \\ 1^2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{y}_0 + \mathbf{k_1} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \qquad \text{så} \qquad \mathbf{k_2} = h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k_1}) = 0.2 \begin{pmatrix} -1.0 \cdot 0.2 \\ 1.0^2 - 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

og til slutt

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.16 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.18 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Uten den første `if`-setningen ville programmet tilordne elementet `A(5,6)` en verdi, noe som er lov, men som vil utvide matrisen med en kolonne. Og det var vel ikke meningen.

Uten den siste `if`-setningen ville programmet forsøkt å tilordne en verdi til elementet `A(0,1)`, noe som vil gi en feilmelding siden index 0 ikke er tillatt.

Oppgave 9 Lag en fil med navn `oppg9.m` som inneholder

```
function y = oppg9(x)
y = exp(x).*sin(x.^2);
```

og skriv følgende i kommando-vinduet:

```
quad(@oppg9,-1,3)
```