Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen: Erik Lindgren
Mobil: 454 75 993

Eksamen i TMA4122 Matematikk 4M

Nynorsk
Måndag 19. desember 2011
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidlar (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal grunngjevast og det skal gå klart fram korleis svara er oppnådd.

Oppgåve 1

a) For $a > 0$, finn Fourier-transformen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ e^{ax} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

b) Rekn ut verdiane til dei to integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{1+\omega^2} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega\sin\omega}{1+\omega^2} d\omega$$

Oppgåve 2

a) Bestem Fourier-sinus rekkja til funksjonen $g(x) = 1$ på intervallet $[0, \pi]$. Finn også summen av rekkja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Hint: Parsevals identitet

b) Løys bølgjelikninga

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

med randvilkår og initialvilkår gitt ved

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ (ii) \quad & u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

c) Likninga

$$u_{tt} + 8 = 4u_{xx}, \qquad t > 0, \quad 0 < x < \pi \tag{2}$$

er ei inhomogen bølgjelikning. Bestem dei stasjonære (dvs. tidsuavhengige) løysingane $u(x,t) = v(x)$ til denne likninga, og bestem så den stasjonære løysinga som oppfyller randvilkåret (i) i (1).

Bestem til slutt løysinga til likninga (2) med randvilkår og initialvilkår gitt ved

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ (ii) \quad & u(x,0) = x(x-\pi), u_t(x,0) = 1 \end{aligned}$$

(Merknad : Likninga (2) kan for eksempel vere ein enkel modell for ein svingande streng der ein tek omsyn til gravitasjonen.)

Oppgåve 3

Vi ser på den ordinære differensiallikninga av orden to

$$y'' = \cos(xy) + x^2.$$

a) Omskriv likninga til eit system av første ordens differensiallikningar, og set opp iterasjonsskjemaet som vi får ved å bruke Heun's metode.

b) Utfør ein iterasjon med denne metoden, med steglengde $h = 0.1$, for å rekne ut ein tilnærma verdi av løysinga $y(x)$ i punktet $x = 0.1$, når initialverdiane er

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Oppgåve 4 Likningsystemet

$$\begin{aligned} x\cos x + \sin y \cos y &= 0 \\ 2x\sin x + y\cos y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

har ei løysing nær punktet $(x,y) = (\pi/2, 0)$. Utfør éin iterasjon med Newtons metode for system brukt på systemet ovanfor, med $x = \pi/2$ og $y = 0$ som startverdiar.

Oppgåve 5 Vi er gitt MATLAB-funksjonen

```
function yb = method(a,b,N,ya)
h = (b-a)/N;
f=@(x,y) -sin(y);
x = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);
x(1) = a;
y(1) = ya;
for n=1:N
    x(n+1) = x(n) + h;
    k1 = h*f(x(n),y(n));
    k2 = h*f(x(n)+0.5*h,y(n)+0.5*k1);
    k3 = h*f(x(n)+0.5*h,y(n)+0.5*k2);
    k4 = h*f(x(n+1),y(n)+k3);
    y(n+1) = y(n)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
yb = y(N+1);
```

som reknar ut ei numerisk tilnærming til løysinga av likninga $y' = -\sin y$ på intervallet (a, b).

a) Kva for metode er implementert her? Anta at du utfører kommandoen

`Q=method(0,1,1,1)`

i MATLAB, kva vert Q?

b) Du får no oppgitt at

`P=method(0,1,2,1)`

resulterer i $P = 0.3969$. Bruk Q, P og hintet under til å finne eit estimat (tilnærming) for feilen i P.
Hint: Feilen i tilnærminga y_h vil gå som Ch^4 der h er steglengda.

c) Hvis vi antar at y er svært liten, så vil likninga

$$y' = -y$$

kunne vere ei tilnærming. Bruk Eulers (framover) metode på denne forenkla likninga med fast steglengd h og initialverdi $y(0) = y_0$ og finn eit eksplisitt uttrykk for y_n som ei tilnærming av $y(nh)$. Avgjer kva verdiar av h er slik at $y_n \to 0$ når $n \to \infty$.

Formlar i numerikk

- La $p(x)$ vere eit polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punkta x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dersom x og alle nodane ligg i intervallet $[a, b]$, s gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for likningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikkar for lysing av eit linert likningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Heuns metode for lysing av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over nokre Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over nokre Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1 - \cos aw}{w} \right)$
$u(x) e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} - i \frac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2+a^2}$