Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instiutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø: mobil 92663824

Eksamen i TMA4123/TMA4125 Matematikk 4M/N

Bokmål
Mandag 21. mai 2012
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Et formelsett på to sider er heftet ved bak oppgavesettet.

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

TMA4123 Matematikk 4M; Alt unntatt oppgave 5 (Laplace).
TMA4125 Matematikk 4N: Alt unntatt oppgave 8 og 9 (Matlab).

Oppgave 1 Finn andregradspolynomet $p_2(x)$ som interpolerer funksjonen $f(x) = 1/x$ i punktene 1, 1.5 og 2.

Bruk polynomet til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Oppgave 2

a) La $f(x)$ være en 2-periodisk funksjon, dvs. $f(x) = f(x+2)$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{for } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{for } \quad 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Lag en skisse av $f(x)$ for $-3 < x < 3$.

Finn Fourierrekka til $f(x)$ (den reelle, ikke den komplekse).

b) Bruk resultatet til å finne summen av rekkene

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

og

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Oppgave 3

a) (Dette punktet teller dobbelt).
Finn alle løsninger på formen $F(x)G(t)$ av problemet

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0 \tag{1a}$$

med randbetingelsene

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0. \tag{1b}$$

(Legg merke til venstre randbetingelse).

Finn deretter den løsningen av (1a), (1b) som i tillegg tilfredstiller startbetingelsene

$$u(x,0) = 3\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi x}{4}\right), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2.$$

b) Finn en funksjon $g(x)$ slik at en løsning til problemet

$$v_{tt} = 4v_{xx}, \qquad 0 \le x \le 2, \quad t > 0$$

med randbetingelsene

$$v_x(0,t) = -1, \qquad v(2,t) = 0$$

kan skrives på formen

$$v(x,t) = u(x,t) + g(x)$$

der $u(x,t)$ er en løsning av (1a), (1b) fra punkt **a)**.

Vis deretter at løsningen $v(x,t)$ som i tillegg tilfredsstiller startbetingelsene

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0$$

kan skrives på formen

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\alpha_n t)\cos(\alpha_n x) + g(x).$$

Skriv opp uttrykkene for A_n (behøver ikke regnes ut) og α_n.

Oppgave 4 Finn funksjonen $y(x)$ som oppfyller ligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(p)e^{-2(x-p)^2}dp = e^{-x^2}.$$

(Hint: Bruk konvolusjon / folding).

Oppgave 5

a) Finn den invers Laplace transformerte til funksjonen

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2}.$$

Bruk resultatet fra dette, samt regelen $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}(f)$ til å vise at

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-s-2)}\right\} = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.$$

b) Løs differensialligningen

$$y''' - y'' - 2y' = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{for } t > 2 \end{cases},$$

med startverdiene $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

Oppgave 6 Utfør en iterasjon med Gauss–Seidel på ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

med startverdiene $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^T = (0, 1, 2)^T$.

Vil iterasjonene konvergere? Begrunn svaret.

Oppgave 7 Gitt følgende system av 1. ordens differensialligninger

$$\begin{aligned} y' &= -y\,w, & y(0) &= 1, \\ w' &= y^2 - w, & w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Finn tilnærmelsen til $y(0.2)$ og $w(0.2)$ ved å utføre et skritt med Heuns metode med skrittlengde $h = 0.2$.

Oppgave 8 Hvilket lineært ligningssystem løses i følgende MATLAB-script?

```
N = 5;
A = zeros(N,N);
b = zeros(N,1);
for i = 1:N
    A(i,i)=2;
    if (i<N)
        A(i,i+1) = 1;
    end
    if (i>1)
        A(i,i-1) = -1;
    end
    b(i)=i^2;
end
x = A\b
```

Forklar hvorfor de to `if`-setningene er nødvendige.

```
Q = QUAD(FUN,A,B) tries to approximate the integral of
  scalar-valued function FUN from A to B to within an
  error of 1.e-6 using recursive adaptive Simpson
  quadrature. FUN is a function handle. The function
  Y=FUN(X) should accept a vector argument X and return
  a vector result Y, the integrand evaluated at each
  element of X.

  Example:
     Q = quad(@myfun,0,2);
  where the file myfun.m defines the function:
     %-------------------%
     function y = myfun(x)
     y = 1./(x.^3-2*x-5);
     %-------------------%

  or, use a parameter for the constant:
     Q = quad(@(x)myfun2(x,5),0,2);
  where the file myfun2.m defines the function:
     %----------------------%
     function y = myfun2(x,c)
     y = 1./(x.^3-2*x-c);
     %----------------------%
```

Figur 1: Dokumentasjon av funksjonen `quad` i MATLAB

Oppgave 9 Vis, ved å skrive de nødvendige linjer med kode, hvordan du kan finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_{-1}^{3} e^x \sin(x^2) dx$$

ved bruk av MATLABs innebygde funksjon `quad`.
Dokumentasjonen av denne er gitt i Figur 1.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h} \big[f(x+h) - f(x) \big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h} \big[f(x+h) - f(x-h) \big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2} \big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1 - \cos aw}{w} \right)$
$u(x) e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} - i \frac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2+a^2}$