1 **Kun for TMA4123 Matematikk 4M!**
Vektoren **y** er samples fra en lineærkombinasjon av to sinuser, en (den sterkeste) med frekvens a og en (den svakeste) med frekvens b (eller vinkelfrekvens hhv. $2\pi a$ og $2\pi b$, om du vil). Grafen viser absoluttverdien til FFT av **y**, og den har klare topper i omtrent 500 og i omtrent 1000. En topp ved n korresponderer til en frekvens på n/T (Hz), eller en vinkelfrekvens på $2\pi n/T$. Siden **y** består av $N = 10^5$ samples i tidsperioden 0 til 5 (sek), er $T = 5$. Dermed er $a \approx 500/5 = 100$ (Hz) og $b \approx 1000/5 = 200$ (Hz).

Grafen går i sin helhet (utenfor figuren) fra 0 til $N = 10^5$ i horisontal retning. Siden FFT er en algoritme for å beregne DFT, og sistnevnte er definert ved

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k/N},$$

har vi at

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{N-n} &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i (N-n)k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k} e^{2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i n k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_k e^{-2\pi i n k/N}} \\
&= \overline{\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k/N}} = \overline{\hat{f}_n}
\end{aligned}$$

(her betyr streken komplekskonjugasjon, og vi har brukt at $e^{-2\pi i k} = 1$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$). Dermed har vi

$$|\hat{f}_{N-n}| = |\hat{f}_n|,$$

så grafen er symmetrisk om $N/2 = 5000$.

1 **Kun for TMA4125 Matematikk 4N!**
Differensialligningen kan skrives

$$y''(t) + 4y(t) = (t-1)u(t-1) = g(t-1)u(t-1),$$

hvor $g(t) = t$. Da er $G(s) = 1/s^2$, og vi får

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2} e^{-s},$$

slik at

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}e^{-s} = \frac{e^{-s}}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{e^{-s}}{4}\left(G(s) - \frac{1}{2}H(s)\right),$$

hvor $H(s) = 2/(s^2+2^2)$. Siden $h(t) = \sin(2t)$ gir invers-transformasjon og bruk at t-forskyvningsteoremet at

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}g(t-1)u(t-1) - \frac{1}{8}h(t-1)u(t-1) \\ &= \frac{1}{4}(t-1)u(t-1) - \frac{1}{8}\sin(2(t-1))u(t-1) \\ &= \frac{1}{4}(t-1)u(t-1) - \frac{1}{8}\sin(2t-2)u(t-1). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ For alle iterasjonene er det klart at et fikspunkt er det samme som en rot av det oppgitte polynomet.

Iterasjon 3 er gitt av $x_{n+1} = g(x_n)$, hvor

$$g(x) = \sqrt[3]{x_n + 1}.$$

Det er klart at hvis $x \in [1, 3/2]$, så er $g(x) \in [1, 3/2]$, siden g er monotont voksende og $g(1) \in [1, 3/2]$. Videre er

$$g'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}},$$

så da er

$$|g'(x)| = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}} < 1$$

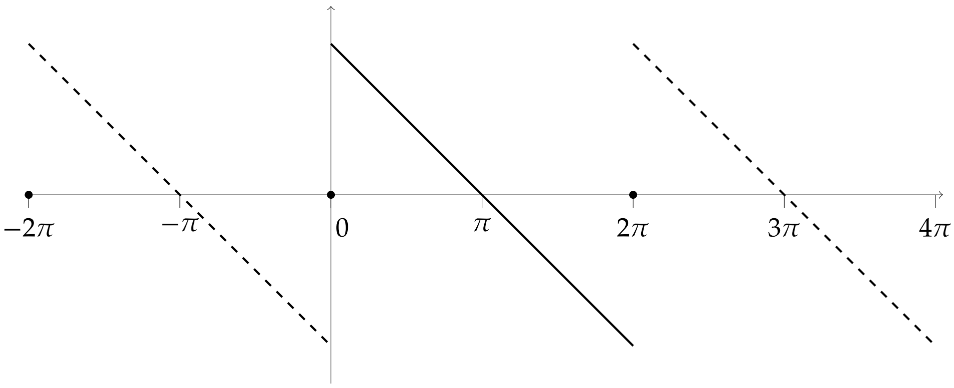
for alle $x \in [1, 3/2]$. Dermed konvergerer denne fikspunktiterasjonen.

Utfører vi iterasjonen fra $x_0 = 1$, finner vi

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \approx 1{,}2599 \\ x_2 &= g(x_1) \approx 1{,}3123 \\ x_3 &= g(x_2) \approx 1{,}3224 \\ x_4 &= g(x_3) \approx 1{,}3243. \end{aligned}$$

Siden $x_5, x_6, \ldots$ vil ligge enda nærmere løsningen enn x_4 gjør, vet vi at de tre første sifrene i løsningen er 1,32.

$\boxed{3}$ **a)** Figur 1 viser grafen til den 2π-periodiske utvidelsen av f.



Figur 1: Grafen til den 2π-periodiske utvidelsen til funksjonen i oppgave 3a. Den heltrukne linjen er definisjonsområdet til den opprinnelige funksjonen, mens den stiplede er utvidelsen.

Utvidelsen til f er odde, så vi vet umiddelbart at $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$. Videre er

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\left[\sin nx - nx\cos nx\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}(-1)^n = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Fourier-rekken til den 2π-periodiske utvidelsen til f er derfor

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin nx.$$

b) Siden (den 2π-periodiske utvidelsen til) f er kontinuerlig i $\pi/2$, er

$$\frac{\pi}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Siden

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1,5,9,\ldots \\ -1 & \text{for } n = 3,7,11,\ldots \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

er

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 1 + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

så den første rekken vi ble bedt om er $\pi/4 - 1$.

For den andre rekken bruker vi Parsevals identitet, som gir

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi (g(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

hvor g er den 2π-periodiske utvidelsen til f. Ved bruk av periodisitet får vi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Med $u(x,t) = X(x)T(t)$ blir den partielle differensialligningen til

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Siden venstre side ikke avhenger av x, og høyre side ikke avhenger av t, må begge sider være lik en konstant. Vi får derfor de to ODE-ene

$$X''(x) - kX(x) = 0 \tag{1}$$
$$T'(t) - kT(t) = 0 \tag{2}$$

for en ukjent konstant k.
Vi har tre mulighet for k:

- $k = 0$: Da er løsningen av ligning (1) $X(x) = Ax + B$. Venstre randbetingelse gir da at $A = 0$, og vi har derfor konstantløsning.
- $k > 0$: Da er løsningen av ligning (1)

  $$X(x) = Ce^{\sqrt{k}x} + De^{-\sqrt{k}x}.$$

  Dermed er

  $$X'(x) = C\sqrt{k}e^{\sqrt{k}x} - D\sqrt{k}e^{-\sqrt{k}x},$$

  og venstre randbetingelse gir $0 = X'(0) = C - D$, så $C = D$ Høyre randbetingelse gir så

  $$0 = X'(\pi) = C\sqrt{k}\left(e^{\sqrt{k}\pi} - e^{-\sqrt{k}\pi}\right)$$

  som bare kan skje dersom $C = 0$ Vi har derfor bare triviell løsning i dette tilfellet.
- $k < 0$: Da er løsningen av ligning (1)

  $$X(x) = M\cos\sqrt{-k}x + N\sin\sqrt{-k}x,$$

  så

  $$X'(x) = -M\sqrt{-k}\sin\sqrt{-k}x + N\sqrt{-k}\cos\sqrt{-k}x.$$

  Venstre randbetingelse gir $0 = X'(0) = N\sqrt{-k}$, som vil si $N = 0$. Høyre randbetingelse gir

  $$0 = X'(\pi) = -M\sqrt{-k}\sin\sqrt{-k}\pi.$$

  Dette er oppfyllt hvis $M = 0$ (triviell løsning) eller hvis $\sqrt{-k}\pi = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$.

Vi har derfor $X_n(x) = M_n \cos nx$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($n = 0$ tar hånd om konstantløsningen). Ligning (2) har løsning

$$T_n(t) = Ee^{-n^2 t},$$

så

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-n^2 t}\cos nx$$

for (omdøpte og sammenslåtte) konstanter A_n.

b) Fra oppgave 4a vet vi at den generelle løsningen er

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx.$$

Initialbetingelsen er

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = (\cos 2x - 1)^2$$

Dette viser at A_n er Fourier-cosinusrekke-koeffisientene til (den like periodiske utvidelsen til) funksjonen på høyre side. Skriver vi denne om som

$$(\cos 2x - 1)^2 = \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x,$$

kan koeffisientene leses rett av: $A_0 = 3/2$, $A_2 = -2$, $A_4 = 1/2$, og $A_n = 0$ for $n \neq 0, 2, 4$. Dermed blir løsningen

$$u(x,t) = \frac{3}{2} - 2e^{-4t}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-16t}\cos 4x.$$

$\boxed{5}$ La $g_a(x) = e^{-a|x|}$. Integralet i oppgaven er en konvolusjon, så ligningen kan skrives

$$f(x) = g_2(x) - 3(f * g_2)(x).$$

Teoremet for Fourier-transformasjon av konvolusjoner gir

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g_2}(\omega) - 3\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g_2}(\omega).$$

Formelarket gir

$$\hat{g_2}(\omega) = \mathcal{F}(g_2)(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\omega^2 + 2^2},$$

så vi har

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\omega^2 + 4}\left(1 - 3\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\right),$$

slik at

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4}{\omega^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\hat{g_4}(\omega).$$

Formelarket gir så

$$f(x) = \frac{1}{2}g_4(x) = \frac{1}{2}e^{-4|x|}.$$

$\boxed{6}$ Funksjonen `matte4` implementerer Jacobi-iterasjon for systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Funksjonen gjør N skritt fra startverdien $\mathbf{x}_0$.

En tilstrekkelig betingelse for konvergens av Jacobi-iterasjon er at matrisen A er strengt diagonaldominant. Hvis vi bytter om på ligning/rad to og tre i ligningssystemet i oppgaven, får vi det ekvivalente ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

med *strengt diagonaldominant matrise*. Formen av Jacobi-iterasjon i funksjonen `matte4` krever også at diagonalelementene er 1, så vi må dele rad nummer en på 4, rad nummer to på 4, og rad nummer tre på 3.

Gir vi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

og en hvilken som helst $\mathbf{x}_0$ til `matte4`, vil funksjonen returnere en tilnærmet løsning av systemet i oppgaven for store N.

$\boxed{7}$ **a)** La

$$\mathbf{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}.$$

Da er

$$\mathbf{z}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ x^2 z_1(x) \end{pmatrix}.$$

Vi har da systemet $\mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x))$ med

$$\mathbf{f}(x, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ x^2 \xi_1 \end{pmatrix}.$$

b) Baklengs Euler er

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{z}^{(n)} + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{z}^{(n+1)}).$$

Med $n = 0$ og $h = 2$ har vi da

$$\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{z}^{(0)} + h\mathbf{f}(h, \mathbf{z}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ z_3^{(1)} \\ 2^2 z_1^{(1)} \end{pmatrix},$$

som er ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \\ z_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Løser vi dette på ordinært vis, finner vi

$$\mathbf{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

så $y(2) \approx z_1^{(1)} = 1$.