NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4123/TMA4125 Matematikk 4M/4N

Faglig kontakt under eksamen: Yurii Lyubarskii[a], Gard Spreemann[b]

Tlf: [a] 91647362 , [b] 93838503

Eksamensdato: 4. juni 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt enkel kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes. Du må ha med nok mellomregninger til at fremgangsmåten din kommer tydelig frem.

Merk at oppgave 1 finnes i to utgaver, én kun for 4M og én kun for 4N!

Formelark er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 2

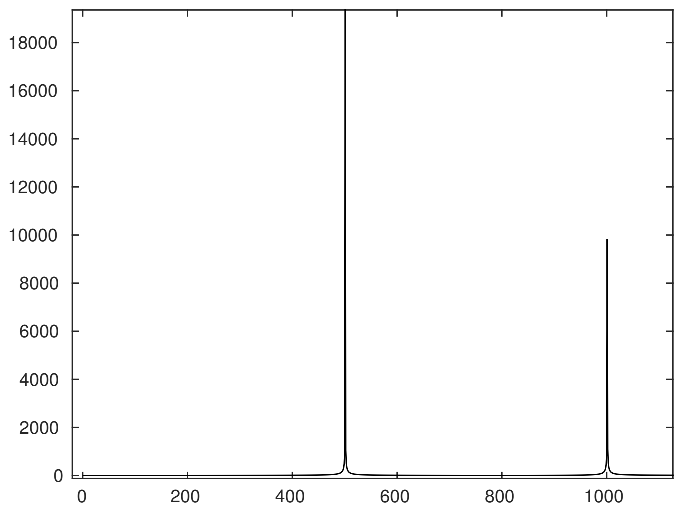
Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Kun for TMA4123 Matematikk 4M!
Anta at du er gitt Matlab-kodesnutten

```
t = linspace(0, 5, 10000);
y = 4*sin(a*2*pi*t) + 2*sin(b*2*pi*t);
plot(abs(fft(y)), 'black');
```

og at kjøring gir plottet vi ser deler av i figur 1.



Figur 1: Deler av plottet fra oppgave 1 for 4M.

Hva må (omtrentlig) verdiene til konstantene `a` og `b` i koden være for at vi skal få dette plottet?

Beskriv delene av grafen vi ikke kan se i figur 1, altså de gjenværende omtrent 9000 elementene i `abs(fft(y))` (vink: hvilken symmetri har grafen, og hvorfor?). *Vis* at grafen må være som du påstår.

Oppgave 1 Kun for TMA4125 Matematikk 4N!
Bruk Laplace-transformasjon for å løse

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 < t < 1, \\ t - 1, & \text{for } t \geq 1, \end{cases}$$

med initialbetingelsene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 2 Tredjegradspolynomet

$$p(x) = x^3 - x - 1$$

har en rot i intervallet $[1, 3/2]$. Hvilken av de tre fikspunktiterasjonene

1. $x_{n+1} = x_n^3 - 1$,
2. $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}$,
3. $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}$,

kan brukes for å finne roten? (Begrunn svaret ditt!)

Bruk denne fikspunkterasjonen og startverdien $x_0 = 1$ for å beregne roten til tre korrekte siffer.

Oppgave 3 La $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2}, & \text{for } 0 < t < 2\pi, \\ 0, & \text{for } t = 0 \text{ og } t = 2\pi. \end{cases}$$

a) Skissér grafen til den 2π-periodiske utvidelsen av f over noen (minst to) perioder. Finn Fourier-rekken til f.

b) Beregn rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Oppgave 4

a) Finn alle funksjoner på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

som tilfredsstiller den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

og randbetingelsene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

b) Finn funksjonen som i tillegg til ligningene (1) og (2) også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = (\cos 2x - 1)^2.$$

Oppgave 5 Bruk Fourier-transformasjon for å finne funksjonen f som tilfredsstiller ligningen

$$f(x) = e^{-2|x|} - 3\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2|x-\xi|}\,\mathrm{d}\xi.$$

Oppgave 6 Du gis Matlab-funksjonen `matte4` under:

```
function x = matte4(A, b, x0, N)
    C = eye(size(A)) - A;   % eye(size(A)) is the identity matrix
                            % with the same size as A.
    x = x0;
    for n=1:N    % 1 <= n <= N
        x = b + C*x;   % C*x means multiplication of the matrix C
                       % with the vector x.
    end

    % x is returned at the end of the function.
end
```

Hvilken numerisk metode er det funksjonen `matte4` implementerer?

Forklar hvordan du kan bruke `matte4` for å tilnærme løsningen av det lineære ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Forklar spesielt hvilke argumenter du må sende til `matte4`, og hvorfor returverdien da tilnærmer løsningen av systemet. (Du skal ikke oppgi kode, bare forklare matematikken som inngår!)

Oppgave 7 Vi skal betrakte den ordinære differensialligningen

$$y'''(x) = x^2 y(x). \tag{3}$$

a) Gjør om den *tredjeordens* ODE-en i ligning (3) til et ekvivalent system av *førsteordens* ODE-er.

b) Initialbetingelsene $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -9$ er gitt. Bruk baklengs Euler med skrittlengde $h = 2$ for å finne en tilnærming til $y(2)$.

Formelark følger som vedlegg.

Numerical formulas

- Let $p(x)$ be the polynomial of degree $\leq n$ which coincides with $f(x)$ at points $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Under the assumption that x and all the nodes x_j lie in the interval $[a, b]$, we have
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Newton's divided difference interpolation formula $p(x)$ of degree $\leq n$:
$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$
- Simpson's rule of integration:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$
Error bounded by $h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.
- Newton's method for solving a system of nonlinear equations $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ is given by the scheme
$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$
- Iteration methods for solving systems of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ when $A_{i,i} = 1$:
$$\text{Jacobi:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - (A - I)\mathbf{x}^{(m)}$$
$$\text{Gauss–Seidel:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - L\mathbf{x}^{(m+1)} - U\mathbf{x}^{(m)}$$
Strict diagonal dominance of A is a sufficient convergence criterion for both.
- Butcher tables for Runge–Kutta methods, where
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \mathbf{k}_j) :$$

(Forward) Euler:
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Backward Euler:
$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Heun/improved Euler:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

RK4:
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Discrete Fourier transform:
$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k / N}$$

Table of some Laplace transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Table of some Fourier transforms

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin a\omega}{\omega} - i\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\right)$
$u(x)e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} - i\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$