Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 13

Øving 13 er ei ekstraøving. Øvinga vert såleis verken retta eller rettleia. Studentar som har 7 godkjende øvingar kan levera øving 13 i til overstudass i dei vanlege innleveringsboksane i Sentralbygg II, 3. etasje lavblokk nord **innan fredag 7. mai klokka 12.30.** Løysingsforslag vert lagt ut om kvelden 7. mai.

1 Gitt Laplace-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $R = [0,1] \times [0,1]$ med randbetingelser

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \sin(\pi x), \quad &&u(x,1) = e^{\pi}\sin(\pi x), \quad &&\text{for } 0 \le x \le 1 \\ &u(0,y) = 0, &&u(1,y) = 0, &&\text{for } 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

a) Finn den eksakte løsningen til problemet ved separasjon av variable.

b) Sett opp et numerisk skjema basert på sentral differens. Bruk uniformt gitter med steglengde $h = 1/N$ i både x- og y-retningen. Dette gir $N+1$ gitterpunkter i begge uavhengige variable.

c) La $N = 2$. Da blir det bare én ukjent, $u_{1,1}$. Beregn $u_{1,1}$.

La nå $N = 4$. Da blir det ni ukjente. Sett opp det lineære ligningssystemet. Bruk den eksakte løsningen som startverdi og utfør to iterasjoner med Gauss-Seidels metode for lineære ligningssystemer.

Sammenlign de numeriske løsningene med den eksakte løsningen i punktet $(x,y) = (1/2, 1/2)$ for både $N = 2$ og $N = 4$.

2 Betrakt den én-dimensjonale varmeledningsligningen

$$u_t = u_{xx}$$

på området $0 \le x \le 1, t \ge 0$ med initialbetingelse

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{for } 0 \le x \le 1$$

og randbetingelser

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{for } t \ge 0.$$

a) Sett opp Crank-Nicolsons skjema for differensialligningen. La h betegne steglengden i x-retning og k betegne steglengden i t-retning. Vi bruker $h = 1/N$ og får derfor $N+1$ gitterpunkter i x-retning.

b) Vis at dette skjemaet kan skrives på matrise-vektorform som

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{u}^n$$

hvor $\mathbf{u}^n = [u_1^n, u_2^n, \ldots, u_{N-1}^n]^T$ og $\mathbf{C}$ er en matrise som kan skrives som

$$\mathbf{C} = (2\mathbf{I} + r\mathbf{B})^{-1}(2\mathbf{I} - r\mathbf{B}).$$

Her er $r = k/h^2$, $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen, og $\mathbf{B}$ er en tridiagonal matrise:

$$\mathbf{B} = \text{tridiag}(-1, 2, -1),$$

som betyr at $\mathbf{B}$ har 2 på diagonalen og -1 på øvre- og nedre-diagonalen.

c) Vi skal sjekke stabiliteten til Crank-Nicolsons metode. Man kan vise at alle egenverdiene til $\mathbf{B}$ ligger mellom 0 og 4, det vil si $0 < \lambda_B < 4$. Videre er egenverdiene til $\mathbf{C}$ gitt ved

$$\lambda_C = (2 + r\lambda_B)^{-1}(2 - r\lambda_B).$$

Vis at for $0 < \lambda_B < 4$ er $|\lambda_C| < 1$ for alle $r > 0$. Siden $|\lambda_C| < 1$ medfrer stabilitet, betyr dette at Crank-Nicolson er ubetinget stabil.

3 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller den ordinære differensialligningen

$$x'' = \cos(x) \tag{1}$$

med tilhørende initialbetingelser $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

a) Innfør passende nye variable og skriv ligningen (1) om til et system av førsteordens differensialligninger.

b) Bruk steglengde $h = 0.1$ og finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to steg med Heuns metode (forbedret Eulers metode).

4 Vi skal løse varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$. Randbetingelsene er

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

og initialbetingelsen er

$$u(x,0) = \cos(\pi(x - \tfrac{1}{2})), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) La $h = 0.1$ være steglengden i x-retning og $k = 0.04$ være steglengden i t-retning. Formuler Eulers metode for dette problemet.

b) Ved å bruke algoritmen i a) fikk vi tabellen under. Finn x, y og z.

t	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
k	0.9133	0.9603	x	0.9133	0.7769
$2k$	0.8771	y	0.8771	0.7769	0.5645
$3k$	0.8423	z	0.8423	0.7165	0.5206

5 **Eksamen 75020 desember 92 oppgåve 4**

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn Fouriercosinusrekka til $f(x)$ i det gitte intervallet.

b) Finn alle løysingar på forma $u(x,y) = F(x)G(y)$ av randverdiproblemet

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi,\ y \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad \text{for } y > 0. \end{cases}$$

c) Finn ei (formell) løysing av (*) på forma $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)G_n(y)$ som oppfyller

$$u(x,0) = x(\pi - x) \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn også ei løysing av (*) som oppfyller

$$u(x,0) = 2\cos x \cos 3x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

6 **Eksamen 75020 desember 93 oppgåve 2**

La $f(x)$ vera ein odde funksjon som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

a) Finn den Fouriertransformerte av $f(x)$.

b) Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å rekna ut integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos t)\sin t}{t}\, dt.$$