# Newtons metode for system

## 1 Newton-Raphsons metode for et system av ikke-lineære ligninger

Newton-Raphsons metode er en numerisk metode for å finne løsninger av et system av ligninger

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}
$$

For enkelthets skyld ser vi her bare på et system av to ligninger, dvs. $n = 2$.

Anta iterat $k-1$ $(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$ er gitt, og vi ønsker å bestemme $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ slik at

$$
f_i(x_1^{k-1} + \Delta x_1, x_2^{k-1} + \Delta x_2) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1}
$$

Ved bruk av Taylor utvikling (avsnitt 2) får vi

$$
\begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{k-1} + \Delta x_1, x_2^{k-1} + \Delta x_2\right) \\ f_2\left(x_1^{k-1} + \Delta x_1, x_2^{k-1} + \Delta x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \\ f_2\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \end{bmatrix} + J^{k-1} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \vec{R}, \tag{2}
$$

hvor matrisa $J^{k-1}$ er Jacobimatrisa beregnet i punktet $\vec{x}^{k-1} = \left[x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right]^T$ det vil si

$$
J^{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \end{bmatrix},
$$

og residualet $\vec{R}$ er av orden 2 eller høyere i $\max\{|\Delta x_1|, |\Delta x_2|\}$. Ved å sette venstre side lik $\vec{0}$ i (2), droppe residualet $\vec{R}$, og erstatte $\Delta x_1$ og $\Delta x_2$ med approksimasjonene $\Delta x_1^{k-1}$ og $\Delta x_2^{k-1}$, får vi

$$
\begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \\ f_2\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \end{bmatrix} + J^{k-1} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{k-1} \\ \Delta x_2^{k-1} \end{bmatrix} = \vec{0}, \tag{3}
$$

som også kan skrives

$$
J^{k-1} \Delta \vec{x}^{k-1} = -\vec{f}^{k-1}, \tag{4}
$$

hvor $\vec{f}^{k-1} = \left[f_1^{k-1}, f_2^{k-1}\right]^T$ og $\Delta \vec{x}^{k-1} = \left[\Delta x_1^{k-1}, \Delta x_2^{k-1}\right]^T$. For at systemet skal ha en løsning må determinanten til $J^{k-1}$ være forskjellig fra 0.

Vi bruker $\Delta \vec{x}^{k-1}$ beregnet som løsning av ligningssystemet (4) for å beregne den nye tilnærmelsen $\vec{x}^k$ som

$$
\vec{x}^k = \vec{x}^{k-1} + \Delta \vec{x}^{k-1}. \tag{5}
$$

Formlene (5) og (4) definerer Newton-Raphsons iterasjonen for et system av ikke-lineære ligninger.

Det ligger utenfor rammen av denne fremstillingen å diskutere under hvilke betingelser Newton-Raphsons metode konvergerer. Vi ser imidlertid at under forutsetning om konvergens vil alle elementene i $\vec{f}$-vektoren gå mot 0, noe som igjen medfører at elementene i de beregnede $\Delta\vec{x}$-vektorene også går mot 0.

**Eks 1.1** For ligningssystemet

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0, \qquad x_1 x_2 - 1 = 0$$

har vi Jacobi matrisen

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

og $\vec{f} = [x_1^2 + x_2^2 - 9, x_1x_2 - 1]^T$. Systemet har en rot i nærheten av $[0.5,\ 2.5]^T$. Beregningen for Newton Raphson metode er vist i tabell 1.1. Beregningene er kjørt v.h.a Matlab funksjon 1.

| k | $x_1^k$ | $x_2^k$ | $\Delta x_1^k$ | $\Delta x_2^k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.50000000 | 2.50000000 | -0.20833333 | 0.54166667 |
| 1 | 0.29166667 | 3.04166667 | 0.04280303 | -0.05946970 |
| 2 | 0.33446970 | 2.98219697 | 0.00096667 | -0.00100855 |
| 3 | 0.33543637 | 2.98118842 | 0.00000037 | -0.00000037 |
| 4 | 0.33543674 | 2.98118805 | – | – |

Table 1: Beregning fra eksempel 1.1

Matlabrutinen er **IKKE** pensum. Den er bare ment som som liten demonstrasjon av hvordan det kan gjøres. Koden er mere pedagogisk lagt opp, enn et eksempel på bra matlabkode.

```
%
% Matlab-rutine for  beregne losningen av et ikke-lineaert
% system med 2 ukjente v.h.a Newton-Raphons metode.
%
% Systemet som loses er:
%
%    x_1^2+x_2^2-9=0,  x_1*x_2-1=0
%
% Programmet itererer 4 ganger og skriver ut resultatet til skjerm

x=[0.5;2.5];                       % Initialiserer en startvektor (vaar beste gjetning)
J=[2*x(1) 2*x(2); x(2) x(1)];      % Lager J-matrisen
f=[x(1)^2+x(2)^2-9;x(1)*x(2)-1];  % Lager f-vektoren
delta_x=[0;0];                     % Initialiserer delta_x vektoren
fprintf('k  x_1^k       x_2^k       delta_x_1^k     delta_x_2^k\n');
                                                                    % Skriver
                                                                    % ut
                                                                    % forklaring
                                                                    % til tabellen

for i=0:3                                   % Itererer 4 ganger
    fprintf('%1g  ',i);                     % Skriver ut iterasjonsnummeret
    fprintf('%6.8f  ',x);                   % Skriver ut x-vektoren
    delta_x=J\-f;                           % Beregner delta_x
```

```
    x=x+delta_x;                              % Oppdaterer x-vektor
    J=[2*x(1) 2*x(2); x(2) x(1)];             % Oppdaterer J-matrisen
                                              % (avhengig av x)
    f=[x(1)^2+x(2)^2-9;x(1)*x(2)-1];          % Oppdaterer f-vektor (ogsaa
                                              % avhengig av x)
    fprintf('%6.8f     ',delta_x);            % Skriver ut delta_x
    fprintf('\n');                            % Skriver ut et linjeskift
end
fprintf('%1g  ',i+1);                         % Skriver ut siste iterasjonsnummer
fprintf('%6.8f  ',x);                         % Skriver ut siste beregnede x-vektor
fprintf('    --            --   ',delta_x); % Indikerer at vi ikke har
                                              % beregnet en ny delta_x
fprintf('\n');                                % Skriver ut linkjeskift
```

**Matlab funksjon 1** Newton-Raphons

## 2 Taylor utvikling

For hver komponent $f_i$ i systemet har vi

$$\begin{aligned}
f_i(x_1^{k-1}+\Delta x_1, x_2^{k-1}+\Delta x_2) &= f_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}+\Delta x_2) + \Delta x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}+\Delta x_2) + \mathcal{O}(\Delta x_1^2) \\
&= f_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \Delta x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \Delta x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \\
&\quad + \mathcal{O}(\Delta x_1^2) + \mathcal{O}(\Delta x_2^2) + \mathcal{O}(\Delta x_1 \cdot \Delta x_2),
\end{aligned}$$

med $i = 1, 2$. Vi tar bare hensyn til de ledde av orden 1 i $\Delta x_1$ og $\Delta x_2$ og ledd av høyere orden inngå i residualet $\vec{R}$. Vi får

$$\begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{k-1}+\Delta x_1, x_2^{k-1}+\Delta x_2\right) \\ f_2\left(x_1^{k-1}+\Delta x_1, x_2^{k-1}+\Delta x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \\ f_2\left(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}\right) \end{bmatrix} + J^{k-1} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \vec{R},$$

med $J^{k-1}$ Jacobimatrisa beregnet i punktet $(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$.