TMA4125
Matematikk 4N
våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 3

Fra Kreyszig, avsnitt 5.4

$\boxed{13}$ Vi skal finne invers Laplacetransformert $f(t)$ for $F(s) = \ln\left[(s^2+1)/(s-1)^2\right]$ ved å bruke formel (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275 (eller formel (6), Kreyszig s. 276).

Vi får

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\ln\frac{s^2+1}{(s-1)^2} = \frac{d}{ds}\left[\ln(s^2+1) - 2\ln(s-1)\right] = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s-1}$$

$$-tf(t) \overset{(1)}{=} \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}\right\} = 2\left(\cos t - e^t\right)$$

$$f(t) = -\frac{2}{t}\left(\cos t - e^t\right) = \frac{2}{t}\left(e^t - \cos t\right).$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.5

$\boxed{9}$ Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $u(t-3) * e^{-2t} = \int_0^t u(\tau-3)e^{-2(t-\tau)}\,d\tau$.

Når $0 < t < 3$ får vi $u(t-3) * e^{-2t} = \int_0^t 0\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = 0$ siden $u(\tau-3) = 0$ for $0 < \tau < t$ når $t < 3$.

Når $t > 3$ får vi

$$u(t-3) * e^{-2t} = \int_0^t u(\tau-3)\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^3 0\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau + \int_3^t 1\cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_{\tau=3}^{t} = \tfrac{1}{2}\left[1 - e^{-2(t-3)}\right].$$

Svaret kan da skrives $u(t-3) * e^{-2t} = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2(t-3)}\right]u(t-3)$.

$\boxed{15}$ Vi skal finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\pi^2)^2\}$ ved å bruke konvolusjon. Vi merker oss først at

$$\frac{s}{(s^2+\pi^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\frac{s}{s^2+\pi^2}$$

og vet at $\mathcal{L}^{-1}\{\pi/(s^2+\pi^2)\} = \sin\pi t$ og $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\pi^2)\} = \cos\pi t$ (Tabell 5.1, Kreyszig s. 254). Følgelig får vi, ved konvolusjonsregelen (Teorem 1, Kreyszig s. 279),

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\frac{s}{s^2+\pi^2}\right\} = \frac{1}{\pi}\sin\pi t * \cos\pi t = \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin\pi v\,\cos\pi(t-v)\,dv.$$

For å regne ut integralet kan vi bruke den trigonometriske identiteten

$$\sin A\cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)] \qquad \text{(jf. Rottmann s. 88)}$$

med $A = \pi v$, $B = \pi(t-v)$ og følgelig $A + B = \pi t$, $A - B = \pi(2v - t)$. Det gir

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin \pi v \cos \pi(t-v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^t [\sin \pi t + \sin \pi(2v-t)]\,dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[v \sin \pi t - \frac{1}{2\pi}\cos \pi(2v-t)\Big]_{v=0}^{t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\Big(t\sin\pi t - \frac{1}{2\pi}\cos \pi t\Big) - \Big(-\frac{1}{2\pi}\cos(-\pi t)\Big)\Big] = \frac{t}{2\pi}\sin \pi t \end{aligned}$$

der vi i siste linje forenklet svaret ved å bruke $\cos(-\pi t) = \cos \pi t$.

$\boxed{29}$ Laplacetransformasjonen skal brukes til å løse integralligningen

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Vi ser at ligningen kan skrives $y(t) = 1 - t * y(t)$. Vi setter $Y = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen ved bruke $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$ (med $n = 0$ og 1) og konvolusjonsregelen. Det gir

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}Y(s).$$

S lser vi ut $Y(s)$:

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{1}{s}, \qquad \left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{1}{s}, \qquad Y(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

og inverstransformerer tilslutt (ved hjelp av tabell):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.6

$\boxed{6}$ Me søkjer $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^3 - 3s^2 + 6^s - 4)/[s^2 - 2s + 2]^2$. Polynomet $s^2 - 2s + 2$ er irredusibelt, og me delbrøkoppspaltar derfor slik:

$$F(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 6s - 4}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \frac{As + B}{(s^2 - 2s + 2)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 2s + 2}.$$

For å bestemma A, B, C og D multipliserer me med fellesnemnaren $(s^2 - 2s + 2)^2$ og samanliknar koeffisientane til s^n på begge sider av likskapsteiknet.

$$\begin{aligned} s^3 - 3s^2 + 6s - 4 &= As + B + (Cs + D)(s^2 - 2s + 2) \\ &= Cs^3 + (D - 2C)s^2 + (A + 2C - 2D)s + B + 2D \end{aligned}$$

(a)	$[s^3]$:	$1 = C$		$C = 1$	
(b)	$[s^2]$:	$-3 = D - 2C$	som gjev	$D = 2C - 3 = -1$	frå (a)
(c)	$[s^1]$:	$6 = A + 2C - 2D$		$A = 6 + 2D - 2C = 2$	frå (b)
(d)	$[s^0]$:	$-4 = B + 2D$		$B = -4 - 2D = -2$	frå (c)

Dermed blir

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2} + \frac{(s-1)}{s^2-2s+2} \\ &= 2\frac{s-1}{((s-1)^2+1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2+1}. \end{aligned}$$

Frå formel 11 og 12 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig har me

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\cos\omega t\} &= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\{e^{at}\sin\omega t\} &= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Ved å utnytta dette og formelen for produkt av sinus og cosinus i Rottmann får me

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{((s-1)^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \\ &= e^t\cos t * e^t \sin t \\ &= \int_0^t e^\tau \cos\tau \cdot e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{e^t}{2}\int_0^t (\sin(t-2\tau)+\sin t)d\tau \\ &= \frac{e^t}{2}\{\left[-\frac{1}{2}\cos(t-2\tau)\right]_0^t + t\sin t\} \\ &= \frac{1}{2}te^t\sin t. \end{aligned}$$

I den første overgangen er det brukt konvolusjonsregelen. Me står til slutt igjen med

$$f(t) = e^t(t\sin t + \cos t).$$

$\boxed{11}$ Me skal utleia formelen

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2a^2}\sinh at \sin at.$$

Frå Rottmann side 82 har me

$$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$$

slik at

$$f(t) = \frac{1}{4a^2}\left(e^{at}\sin at + e^{-at}\sin(-at)\right).$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{a}{(s-a)^2+a^2}+\frac{-a}{(s+a)^2+a^2}\right\} \\
&= \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{a[(s+a)^2+a^2]-a[(s-a)^2+a^2]}{[(s-a)^2+a^2][(s+a)^2+a^2]}\right\} \\
&= \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{a[s^2+2as+a^2-s^2+2as-a^2]}{(s-a)^2(s+a)^2+a^2[(s-a)^2+(s+a)^2]+a^4}\right\} \\
&= \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{4a^2s}{[(s-a)(s+a)]^2+a^2[(s-a)^2+(s+a)^2]+a^4}\right\} \\
&= \frac{s}{s^4+4a^4}.
\end{aligned}$$