Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 4

Fra Kreyszig, avsnitt 5.6

$\boxed{3}$ Vi søker $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^2 + 9s - 9)/(s^3 - 9s)$ og delbrøkoppspalter

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s - 9}{s^3 - 9s} = \frac{s^2 + 9s - 9}{s(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3}.$$

For å bestemme A, B, C, multipliserer vi med fellesnevneren $s(s-3)(s+3)$. Det gir

$$s^2 + 9s - 9 = A(s-3)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s-3).$$

Så setter vi inn $s = 0$, $s = 3$, $s = -3$, og får

$$-9 = A \cdot (-9),\ A = 1; \qquad 27 = B \cdot 18,\ B = 3/2; \qquad -27 = C \cdot 18,\ C = -3/2.$$

Dermed blir

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3/2}{s-3} - \frac{3/2}{s+3} \quad \text{og følgelig} \quad f(t) = 1 + \tfrac{3}{2}e^{3t} - \tfrac{3}{2}e^{-3t} = 1 + 3\sinh 3t.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.7

$\boxed{5}$ Me skal løysa initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' + y_2 &= 2\cos t, \quad y_1(0) = 0 \\ y_1 + y_2' &= 0, \quad y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Me set $\mathcal{L}\{y_1\} = Y_1$ og $\mathcal{L}\{y_2\} = Y_2$. Ved å nytta derivasjonsformelen $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ og formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig får me

$$\begin{aligned} sY_1 + Y_2 &= \frac{2s}{s^2+1}, \\ Y_1 + sY_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminasjon av Y_1 ($Y_1 = 1 - sY_2$ frå andre likning innsett i første likning) gjev

$$Y_2 = \frac{-2s}{(s^2+1)(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1}.$$

Delbrøkoppspaltar så på følgjande måte

$$\frac{-2s}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2-1}.$$

For å bestemma A, B, C og D multipliserer me med fellesnemnaren $(s^2+1)(s^2-1)$ og samanliknar koeffisientane til s^n på begge sider av likskapsteiknet.

$$\begin{aligned} -2s &= (As+B)(s^2-1) + (Cs+D)(s^2+1) \\ &= A(s^3-s) + B(s^2-1) + C(s^3+s) + D(s^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllcl} \text{(a)} & [s^3]: & 0 = A + C & & -A = C = -1 \quad \text{frå (c)} \\ \text{(b)} & [s^2]: & 0 = B + D & \text{som gjev} & -B = D = 0 \quad \text{frå (d)} \\ \text{(c)} & [s^1]: & -2 = -A + C & & -2 = 2C \quad \text{frå (a)} \\ \text{(d)} & [s^0]: & 0 = -B + D & & 0 = 2D \quad \text{frå (b)} \end{array}$$

Dermed blir

$$Y_2 = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2-1} + \frac{s}{s^2-1} = \frac{s}{s^2+1},$$

som ved formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig gjev

$$y_2(t) = \cos t.$$

Innsetjing av uttrykket for Y_2 i formelen $sY_1 + Y_2 = \frac{2s}{s^2+1}$ gjev

$$\begin{aligned} sY_1 + \frac{s}{s^2+1} &= \frac{2s}{s^2+1} \\ Y_1 &= \frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Me står dermed igjen med (formel 8 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig)

$$y_1(t) = \sin t.$$

$\boxed{7}$ Me skal løysa initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 2, y_1'(0) = 3 \\ y_2'' &= 4y_1 - 4e^t, \quad y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2. \end{aligned}$$

Me set $\mathcal{L}\{y_1\} = Y_1$ og $\mathcal{L}\{y_2\} = Y_2$. Ved å nytta derivasjonsformelen $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$ og formel 6 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig får me

$$\begin{aligned} s^2Y_1 - 2s - 3 &= Y_1 + 3Y_2, \\ s^2Y_2 - s - 2 &= 4Y_1 - \frac{4}{s-1}. \end{aligned}$$

Eliminasjon av Y_1 ($Y_1 = \frac{3Y_2+2s+3}{s^2-1}$ frå første likning innsett i andre likning) gjev

$$\begin{aligned} s^2Y_2 - s - 2 &= 4\left(\frac{3Y_2+2s+3}{s^2-1}\right) - \frac{4}{s-1} \\ [s^2(s-1)(s+1) - 12]Y_2 &= 8s + 12 - 4s - 4 + (s+2)(s-1)(s+1) \\ Y_2 &= \frac{4s+8+(s+2)(s-1)(s+1)}{s^2(s-1)(s+1)-12} \\ Y_2 &= \frac{s^3+2s^2+3s+6}{s^4-s^2-12}. \end{aligned}$$

Me observerer at $s = -2$ er rot både i teljaren og nemnaren. Vanleg polynomdivisjon gjev oss

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{(s+2)(s^2+3)}{(s+2)(s^3-2s^2+3s-6)} \\ &= \frac{s^2+3}{s^3-2s^2+3s-6}. \end{aligned}$$

Ved å studera nemnaren ser me at $s = 2$ er ei rot. Bruk av vanleg polynomdivisjon gjev oss no

$$Y_2 = \frac{s^2+3}{(s-2)(s^2+3)} = \frac{1}{s-2}.$$

Formel 6 i tabell 5.1 side 254 i Kreysig fortel oss at

$$y_2(t) = e^{2t}.$$

Innsetjing av uttrykket for Y_2 i formelen $Y_1 = \frac{Y_2+2s+3}{s^2-1}$ gjev

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\frac{3}{s-2}+2s+3}{s^2-1} \\ &= \frac{2s^2-s-3}{(s+1)(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

Me ser at $s = -1$ er ei rot i nemnaren slik at me ved vanleg polynomdivisjon har

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{(s+1)(2s-3)}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} + \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}. \end{aligned}$$

Ved formel 6 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig står me igjen med

$$y_1(t) = e^t + e^{2t}.$$

$\boxed{11}$ Vi skal løyse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + 1 - u(t-1), \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' &= y_1 + 1 - u(t-1), \quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Vi set $Y_1 = \mathcal{L}\{y_1\}$, $Y_2 = \mathcal{L}\{y_2\}$. Ved å bruke formelen $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{1}{s}e^{-as}$ og derivasjonsregelen $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ får vi

$$\begin{aligned} sY_1 + Y_2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}, \\ -Y_1 + sY_2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}. \end{aligned}$$

Eliminasjon av Y_1 ($Y_1 = sY_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}$ frå andre likning innsett i første likning) gir

$$Y_2 = \frac{1}{s(1+s^2)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s(1+s^2)}e^{-s} - \frac{e^{-s}}{1+s^2}.$$

Vi har $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\} = \sin t$. Av regelen $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ får vi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s^2}\right\} = \int_0^t \sin\tau\,d\tau = 1 - \cos t.$$

(Her kunne vi også bruke delbrøkspalting eller konvolusjonsregelen.) Ved også å bruke forskyvningsregelen $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$ får vi då

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 - \cos t + \sin t - u(t-1)\,[1 - \cos(t-1)] - u(t-1)\sin(t-1) \\ &= 1 - \cos t + \sin t + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)]. \end{aligned}$$

Innsetjing av uttrykket for Y_2 i formelen $Y_1 = sY_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}$ gir

$$Y_1 = -\frac{1}{s} + \frac{1}{1+s^2} + \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{1+s^2}e^{-s} - \frac{s}{1+s^2}e^{-s}$$

og dermed som ovanfor

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 + \sin t + \cos t + u(t-1) - u(t-1)\sin(t-1) - u(t-1)\cos(t-1) \\ &= -1 + \sin t + \cos t + u(t-1)\,[1 - \sin(t-1) - \cos(t-1)]\,. \end{aligned}$$

$\boxed{16}$ Når alle strømmene inn og ut fordobles mens tankene og initialbetingelsene beholdes, vil vi vel forvente samme forløp for saltmengdene y_1 og y_2 som før, men at alt skjer dobbelt så fort. Differensialligningssystemet vil nå være

$$y_1' = -\frac{16}{100}y_1 + \frac{4}{100}y_2 + 12, \qquad y_2' = \frac{16}{100}y_1 - \frac{16}{100}y_2$$

med intialbetingelser $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$. Vi Laplacetransformerer og får ligningssystemet

$$\begin{aligned} (-0.16 - s)Y_1 + \quad 0.04Y_2 \quad &= -12/s \\ 0.16Y_1 \quad + (-0.16 - s)Y_2 &= -150. \end{aligned}$$

Vi løser ligningssystemet (f.eks. på kalkulator) og delbrøkoppspalter løsningene.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{18s + 1.92}{s(s+0.24)(s+0.08)} = \frac{100}{s} - \frac{62.5}{s+0.24} - \frac{37.5}{s+0.08} \\ Y_2 &= \frac{150s^2 + 24s + 1.92}{s(s+0.24)(s+0.08)} = \frac{100}{s} + \frac{125}{s+0.24} - \frac{75}{s+0.08} \end{aligned}$$

Tilslutt inverstransformerer vi, og får

$$y_1(t) = 100 - 62.5e^{-0.24t} - 37.5e^{-0.08t}, \qquad y_2(t) = 100 + 125e^{-0.24t} - 75e^{-0.08t}.$$

Vi ser at om vi erstatter t med $t/2$ i uttrykkene for y_1 og y_2, får vi løsningene i Eksempel 1, som forventet.

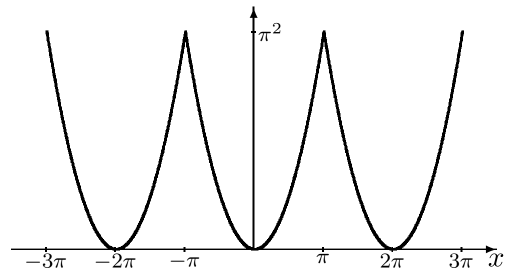
Fra Kreyszig, avsnitt 10.1

$\boxed{8}$

$f(x) = x^2 \quad \text{for } -\pi < x < \pi$

$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x$

Grafen er tegnet for $-3\pi \le x \le 3\pi$



$\boxed{16}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x$

Grafen er tegnet for $-3\pi \le x \le 3\pi$