LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MATEMATIKK 4N, 19.12.2003

Oppgave 1

a) Vis at den Laplacetransformerte av $f(t) = 2te^t - e^t + e^{-t}$ er gitt ved

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s+1)}.$$

Finn videre invers Laplacetransformert av $e^{-s}F(s)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' - y = r(t) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

hvor $r(t) = 0$ for $0 < t < 1$ og $r(t) = e^t$ for $t > 1$.

Løsning. a) Vi bruker s-forskyvningsregelen (Rottmann)

$$\mathcal{L}\{g(t)e^{at}\} = G(s-a)$$

med $g(t) = t$. Da er $G(s) = \frac{1}{s^2}$, så dette gir oss $\mathcal{L}\{te^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}$. Videre har vi $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ og $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$. Altså er

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1},$$

og hvis vi setter dette på fellesnevner får vi $\frac{4}{(s-1)^2(s+1)}$.

Videre har vi ved t-forskyvningsregelen (Rottmann)

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} = f(t-1)u(t-1),$$

der u er Heavisidefunksjonen (*unit step function*). Setter vi inn for $f(t-1)$ får vi da svaret:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} &= \left[2(t-1)e^{t-1} - e^{t-1} + e^{1-t}\right] u(t-1) \\ &= \left[(2t-3)e^{t-1} + e^{1-t}\right] u(t-1)\end{aligned}$$

Alternativt:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1, \\ (2t-3)e^{t-1} + e^{1-t} & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

b) For venstresiden bruker vi derivasjonsregelen og initialverdiene:

$$(*) \qquad \mathcal{L}\{y'' - y\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = (s^2-1)Y(s) - s - 1$$

der $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. For høyresiden skriver vi

$$r(t) = e^t u(t-1)$$

der u er Heavisidefunksjonen (unit step function). Men for å kunne bruke t-forskyvningsregelen, må vi skrive $r(t)$ på formen $h(t-1)u(t-1)$. Vi skriver derfor $e^t = ee^{t-1}$. Det gir

$$r(t) = h(t-1)u(t-1),$$

hvor $h(t) = ee^t$, som har Laplacetransformert $H(s) = \frac{e}{s-1}$. t-forskyvningsregelen gir oss da:

$$(**) \qquad \mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{h(t-1)u(t-1)\} = e^{-s}H(s) = \frac{e^{1-s}}{s-1}.$$

Ved å sette $(*) = (**)$ får vi

$$(s^2-1)Y(s) - s - 1 = \frac{e^{1-s}}{s-1}$$

og ved å løse dette for $Y(s)$ og bruke at $(s^2-1) = (s-1)(s+1)$:

$$Y(s) = \frac{e^{1-s}}{(s-1)^2(s+1)} + \frac{1}{s-1}.$$

Men fra svaret på siste del av punkt (a) har vi, med $f(t)$ som i (a),

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{1-s}}{(s-1)^2(s+1)}\} = \frac{e}{4}f(t-1)u(t-1).$$

Dessuten er $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} = e^t$, så vi har at

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{e}{4}f(t-1)u(t-1) + e^t.$$

Ved å sette inn uttrykket for $f(t-1)$ får vi svaret:

$$y(t) = \frac{e}{4}\left[(2t-3)e^{t-1} + e^{1-t}\right]u(t-1) + e^t = \frac{1}{4}\left[(2t-3)e^t + e^{2-t}\right]u(t-1) + e^t$$

Alternativt (husk at $u(t-1) = 0$ for $t < 1$ og $u(t-1) = 1$ for $t > 1$):

$$y(t) = \begin{cases} e^t & \text{for } t < 1, \\ \frac{1}{4}\left[(2t+1)e^t + e^{2-t}\right] & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

Oppgave 2 Løs integralligningen

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad t > 0.$$

Løsning. Vi gjenkjenner integralet som konvolusjonsproduktet av $y(t)$ med funksjonen $f(t) = t$. Altså kan ligningen skrives:

$$y(t) = 1 - (f * y)(t).$$

Anvender vi Laplacetransformasjon på begge sider, får vi:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - F(s)Y(s),$$

der $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ og $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}$. Følgelig:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{Y(s)}{s^2} \implies \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{1}{s} \implies Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{1+s^2} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Fra tabell (Rottmann) finner vi da svaret:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = \cos t.$$

Oppgave 3

a) La $f(x) = x(1-x)$ for $0 \le x \le 1$. Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Bestem summen av rekken $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots$

I resten av oppgaven skal vi se på rand- og initialverdiproblemet

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

der g er en gitt konstant. (Problemet modellerer en svingende, horisontal streng påvirket av tyngdekraften.)

c) Finn funksjonen $v(x)$ (uavhengig av tiden t) som tilfredsstiller randproblemet

$$(2) \qquad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

d) Finn alle løsninger på formen $w(x,t) = F(x)G(t)$ av randproblemet

$$(3) \qquad \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

Bestem videre en løsning av (3), gitt på rekkeform, slik at $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ løser det opprinnelige problemet (1).

Løsning. a) Fra Rottmann (appendiks) har vi at Fourier-sinusrekken er ($L = 1$ her)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

der

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx.$$

Disse integralene kan vi regne ut med delvis integrasjon (eller vi kan bruke Rottmann, hvor de ubestemte integralene $\int x \sin(ax)\, dx$ og $\int x^2 \sin(ax)\, dx$ står oppført [a en vilkårlig konstant]).

La oss bruke delvis integrasjon direkte:

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)g'(x),\, dx && \Big(f(x) = x(1-x), \quad g'(x) = \sin(n\pi x)\Big) \\
&= 2\left[f(x)g(x)\right]\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx && \Big(f'(x) = 1-2x, \quad g(x) = \frac{-1}{\pi n}\cos(n\pi x)\Big) \\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u(x)v'(x),\, dx && \Big(u(x) = 1-2x, \quad v'(x) = \cos(n\pi x)\Big) \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[u(x)v(x)\right]\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx && \Big(u'(x) = -2, \quad v(x) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big) \\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[-\cos(n\pi x)\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-\cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}
$$

Svaret er derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x).$$

Alternativt: Siden

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{(n\pi)^3} & \text{for } n = 1, 3, \ldots, \\ 0 & \text{for } n = 2, 4, \ldots, \end{cases}$$

kan vi også uttrykke svaret som følger:

$$\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right).$$

b) Fra punkt (a) har vi, for $0 \le x \le 1$,

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right)$$

At vi har likhet her, følger fra konvergenskriteriet for Fourierrekker, for Fourier-sinusrekken er rett og slett Fourierrekken til den *odde periodiske utvidelsen* av $f(x)$ med periode 2, og denne utvidelsen er kontinuerlig overalt (tegn grafen!), og har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt. (Den er faktisk kontinuerlig deriverbar.) [Merk: Strengt tatt er det kun nødvendig å begrunne at vi har likhet i $(*)$ for den spesielle x-verdien vi skal sette inn, nemlig $x = 1/2$.]

For å få fortegnet til å alternere mellom $+$ og $-$, som i den rekken vi skal finne summen av, må vi velge en passende x i $(*)$. Vi velger $x = 1/2$, fordi

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 2, 4, \ldots,, \\ +1 & \text{for } n = 1, 5, \ldots,, \\ -1 & \text{for } n = 3, 7, \ldots,, \end{cases}$$

Vi får altså:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - + \cdots\right)$$

som gir det endelige svaret:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

c) Siden v er uavhengig av t, er de partielle deriverte med hensyn på t, alle lik 0. Spesielt er $v_{tt} = 0$, så ligningen $v_{tt} - v_{xx} + g = 0$ forenkles til $v_{xx} = g$, dvs.

$$v''(x) = g.$$

Integrasjon gir

$$v'(x) = gx + C \implies v(x) = \frac{1}{2}gx^2 + Cx + D,$$

der C og D er konstanter. Men randbetingelsene gir

$$v(0) = v(1) = 0 \implies D = 0, \quad C = -\frac{1}{2}g$$

Svaret er derfor: $v(x) = \frac{1}{2}g(x^2 - x) = -\frac{1}{2}gx(1 - x)$. Eller med $f(x)$ som i punkt (a):

$$v(x) = -\frac{1}{2}g \cdot f(x).$$

d) Sett $w(x, t) = F(x)G(t)$. I det følgende ser vi bort fra den *trivielle løsningen* $w \equiv 0$, dvs. vi ser bort fra muligheten $F \equiv 0$, og likeledes $G \equiv 0$.

Ligningen i (3) gir oss

$$F(x)G''(t) - F''(x)G(t) = 0$$

dvs.

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}$$

og siden venstresiden kun avhenger av x, mens høyresiden kun avhenger av t, må begge sider være lik en konstant k. Dette gir oss ordinære differensialligninger for $F(x)$ og $G(t)$:

$$F''(x) = kF(x), \tag{4}$$

$$G''(t) = kG(t) \tag{5}$$

Videre gir randbetingelsene i (3) at

$$F(0) = F(1) = 0. \tag{6}$$

Vi løser først (4), (6). Vi ser separat på de tre mulighetene $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$.

1. $k > 0 \implies$ generell løsning $F(x) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$, der $\lambda = \sqrt{k}$. Men (6) $\implies A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0 \implies$ generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (6) $\implies A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0 \implies$ generell løsning $F(x) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)$, der $\lambda = \sqrt{-k}$. (6) gir:

   $$F(0) = A = 0 \implies F(1) = B\sin(\lambda) = 0 \implies \sin(\lambda) = 0 \implies \lambda = n\pi, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

   og derfor:

   $$F(x) = F_n(x) = B_n \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3 \tag{7}$$

   Nå løser vi (5) med $k = -\lambda^2 = -\pi^2 n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Generell løsning er

   $$G(t) = G_n(t) = C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t). \tag{8}$$

   Merk at vi kan sette $B_n = 1$ i (7), siden vi har to vilkårlige konstanter i $G_n(t)$. Svaret blir derfor:

   $$w_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = [C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t)]\sin(n\pi x).$$

Vi kommer nå til det siste spørsmålet. Det er klart at $u = v + w$ oppfyller ligningen og randbetingelsen i (1) [dette er fordi ligningen er lineær, v er en partikulær løsning, og w er en homogen løsning]; hovedpoenget er å få u til å oppfylle initialbetingelsen:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Siden $v(x) = \frac{1}{2}g \cdot f(x)$ [der $f(x)$ er som i punkt (a)!] har vi at

$$u(x,0) = v(x) + w(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = w_t(x,0) = 0$$

dvs.

$$w(x,0) = -v(x) = \frac{1}{2}g \cdot f(x), \qquad w_t(x,0) = 0. \tag{9}$$

Den generelle løsningen på rekkeform er:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) \;\; = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t)\right] \sin(n\pi x)$$

som innsatt i (9) gir:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) = -\frac{1}{2} g \cdot f(x), \\ w_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi D_n \sin(n\pi x) = 0. \end{aligned}$$

Dette gir at $D_n = 0$ for alle n, og videere at C_n er Fourier-sinuskoeffisientene til $-\frac{1}{2}g \cdot f(x)$; fra punkt (a) ser vi derfor at

$$C_n = \frac{1}{2} g b_n = \frac{2g}{(\pi n)^3} \left[1 - (-1)^n\right]$$

Endelig svar er derfor:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g \left[1 - (-1)^n\right]}{(\pi n)^3} \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

Oppgave 4 Vi ser på den partielle differensialligningen

$$u_t - 2tu_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

med randbetingelsene $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0$ for $t \geq 0$.

a) Finn en ordinær differensialligning tilfredsstilt av den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx$ av $u(x,t)$, og løs denne ligningen.

b) Anta i tillegg initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

der f er en gitt kontinuerlig, integrerbar funksjon. Vis at $u(x,t)$ kan skrives på formen

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y,t)\,dy, \qquad (t > 0)$$

og finn $g(y,t)$ eksplisitt. Det oppgis at $\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}$ $(a > 0$ konstant).

Løsning. a) Derivasjon under integraltegnet gir

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \hat{u}_t$$

[mer detaljert: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx\right)$].

Videre: Fra den generelle 'derivasjonsregelen' $\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}$ (Rottmann) har vi (merk at $2t$ her behandles som en konstant)

$$\mathcal{F}\{2tu_{xx}\} = 2t\mathcal{F}\{u_{xx}\} = 2t(iw)^2\hat{u} = -2tw^2\hat{u}.$$

Konklusjonen er at (vi tar Fouriertransformert av begge sider av ligningen):

$$\mathcal{F}\{u_t - 2tu_{xx}\} = \hat{u}_t + 2tw^2\hat{u} = 0,$$

som er den søkte ordinære differensialligningen. Når vi skal løse denne, kan vi holde variabelen w konstant. [Med andre ord: Vi ser på ligningen $y' + 2tw^2y = 0$ for w konstant! Hvis man ikke ser løsningen direkte, kan man separere de variable y og t: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -2w^2t$, og integrere mhp. t.]

Den generelle løsningen er $\hat{u} = Ae^{-w^2t^2}$ hvor A er en konstant. Men siden w ble hold midlertidig fast, og nå 'slippes løs' igjen, må vi la $A = A(w)$ avhenge av w, for å få den mest generelle løsningen. Altså er svaret:

$$\hat{u}(w,t) = A(w)e^{-w^2t^2}.$$

b) Initialbetingelsen sier at $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$. Følgelig er $A(w) = \hat{f}(w)$, og

$$(*) \qquad \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-w^2t^2}.$$

Integralet i oppfaven gjenkjenner vi som et konvolusjonsprodukt (mhp. x). Ved å ta den Fouriertransformerte av begge sider har vi:

$$(**) \qquad \hat{u}(w,t) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\hat{g}(w,t)$$

Sammenligner vi $(*)$ og $(**)$, ser vi at

$$\hat{g}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2t^2}.$$

Vi bruker nå den oppgitte informasjonen

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}.$$

For å få samme eksponential må vi velge a slik at $\frac{1}{4a} = t^2$, dvs. $a = \frac{1}{4t^2}$. Da har vi:

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2/(4t^2)}\} = \sqrt{2}te^{-w^2t^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\{\frac{1}{\sqrt{2}t}e^{-x^2/(4t^2)}\} = e^{-w^2t^2} \Longrightarrow \mathcal{F}\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}t}e^{-x^2/(4t^2)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2t^2}.$$

Konklusjonen er at

$$g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}e^{-x^2/(4t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\exp\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right).$$

Oppgave 5

a) Bruk både Lagranges og Newtons interpolasjonsmetoder til å finne annengradspolynomet $p(x)$ som oppfyller $p(-1) = 1$, $p(0) = 1$ og $p(1) = 3$. Merk at begge metodene skal vises.

b) Anta at $f(x)$ er en tre ganger kontinuerlig deriverbar funksjon slik at

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3 \quad \text{og} \quad |f'''(x)| \leq 1 \quad \text{for } -1 < x < 1.$$

Vis at $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}$ for $-1 \leq x \leq 1$. (*Hint:* Ta utgangspunkt i en av formlene fra det vedlagte formelarket.)

Løsning. a) Datasettet er

k	0	1	2
x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	1	1	3

, og de tilsvarende Lagrangepolynomene er:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x^2-x),$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(1)(-1)} = -x^2+1,$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(2)(1)} = \frac{1}{2}(x^2+x).$$

Derfor er

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\cdot l_k(x) = l_0(x) + l_1(x) + 3l_2(x) \\ &= \frac{1}{2}(x^2-x) - x^2 + 1 + \frac{3}{2}(x^2+x) = x^2+x+1. \end{aligned}$$

Dividert differansetabell:

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
-1	1		
		$0/1 = 0$	
0	1		$2/2 = 1$
		$2/1 = 2$	
1	3		

Newtons formel gir da:

$$p(x) = 1 + 0\cdot(x-x_0) + 1\cdot(x-x_0)(x-x_1) = 1 + (x+1)x = 1 + x + x^2.$$

b) Vi bruker den første formelen fra formelarket (den andre formelen er også gyldig her, men er ikke skarp nok; den gir $|f(x)-p(x)| \leq \frac{1}{12}$). Vi har da ($n=2$ i dette tilfellet)

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi) g(x)$$

der ξ er et punkt i intervallet $(-1,1)$ og

$$g(x) = \prod_{i=0}^{2}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x+1)x(x-1) = x(x^2-1).$$

Vi tar absoluttverdi og bruker at $|f'''(\xi)| \leq 1$:

$$|f(x)-p(x)| \leq \frac{1}{3!}\,|f'''(\xi)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{3!}\,|g(x)|\,,$$

så vi må bestemme maksimum M av $|g(x)|$ i intervallet $-1 \leq x \leq 1$. Siden $g(x)$ er odde, er det nok å se på intervallet $0 \leq x \leq 1$, og der er $|g(x)| = x(1-x^2)$. Den deriverte er $1-3x^2$, som er lik null i $x = 1/\sqrt{3}$. Verdien der er

$$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \tag{$*$}$$

Vi må også sjekke verdien i endepunktene. Men $g(0) = 0$ og $g(1) = 0$, så maksimum er $(*)$. Konklusjonen er da:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}\,|g(x)| \leq \frac{2}{3!3\sqrt{3}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Oppgave 6 Utfør én iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^3 + 1 &= 0, \\ x_1^2 - x_1 x_2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

med startverdier $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 1$.

Løsning. Vi skriver systemet på vektorform $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, der

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^3 + 1 \\ x_1^2 - x_1 x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen er

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3x_2^2 \\ 2x_1 - x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

Startvektoren er $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og den tilsvarende Jacobimatrisen er $\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Fra formelarket har vi da at neste iterat er $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}$, der $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$ er løsningen av det lineære ligningssystemet

$$\mathbf{J}^{(0)} \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som har løsning $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det endelige svaret blir derfor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Kommentar: Metoden konvergerer mot en løsning $x_1 = 1.94728\ldots$, $x_2 = 1.43375\ldots$.)

Oppgave 7 Vi skal løse numerisk

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La $N \geq 2$ være et heltall, sett $h = 1/N$, og la $k > 0$. Dette gir oss gitterpunktene (x_i, t_j), der $x_i = i \cdot h$, $t_j = j \cdot k$. Vi betrakter differanseskjemaet (fullt implisitt metode)

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots,$$

der U_i^j er den søkte tilnærmelsen til u i punktet (x_i, t_j).

a) La $N = 4$, $k = \frac{1}{32}$. Vis at ligningssystemet for U_1^1, U_2^1 og U_3^1 kan skrives

$$(*) \qquad \begin{cases} 2U_1^1 - \frac{1}{2}U_2^1 = \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{2}U_1^1 + 2U_2^1 - \frac{1}{2}U_3^1 = 1, \\ -\frac{1}{2}U_2^1 + 2U_3^1 = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

b) Sett $x = U_1^1$, $y = U_2^1$ og $z = U_3^1$, og utfør én iterasjon med Gauss-Seidels metode på $(*)$, med startverdier $x^0 = 3/4$, $y^0 = 1$ og $z^0 = 3/4$.

Løsning. a) Med $N = 4$, $k = \frac{1}{32}$ blir skjemaet (siden $h^2 = (1/4)^2 = 1/16$)

$$32(U_i^{j+1} - U_i^j) = 16(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, \dots,$$

dvs.

$$U_i^{j+1} - U_i^j = \frac{1}{2}(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, \dots,$$

For å finne ligningssystemet for U_1^1, U_2^1 og U_3^1 må vi sette $j = 0$:

$$U_i^1 - U_i^0 = \frac{1}{2}(U_{i+1}^1 - 2U_i^1 + U_{i-1}^1) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3.$$

Vi rydder opp:

$$-\frac{1}{2}U_{i+1}^1 + 2U_i^1 - \frac{1}{2}U_{i-1}^1 = U_i^0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3.$$

Men randbetingelsen gir at $U_0^1 = U_4^1 = 0$, så vi får systemet

$$(*) \qquad \begin{cases} 2U_1^1 - \frac{1}{2}U_2^1 = U_1^0, \\ -\frac{1}{2}U_1^1 + 2U_2^1 - \frac{1}{2}U_3^1 = U_2^0, \\ -\frac{1}{2}U_2^1 + 2U_3^1 = U_3^0. \end{cases}$$

Initialbetingelsen gir $U_i^0 = 4x_i(1 - x_i)$, dvs. (siden $x_i = \frac{i}{4}$)

$$U_1^0 = \frac{3}{4}, \quad U_2^0 = 1, \quad U_1^0 = \frac{3}{4}.$$

Setter vi dette inn i $(*)$, får vi det ønskede svaret.

b) Vi ser altså på

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2}y \phantom{- \frac{1}{2}z} &= \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z &= 1, \\ -\frac{1}{2}y + 2z &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

eller (divisjon med 2)

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{4}y \phantom{- \frac{1}{4}z} &= \frac{3}{8}, \\ -\frac{1}{4}x + \ y - \frac{1}{4}z &= \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4}y + \ z &= \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

Gauss-Seidel for én iterasjon av dette systemet er:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}y^0 \\ y^1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^1 + \frac{1}{4}z^0 \\ z^1 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}y^1 \end{aligned}$$

og med de gitte startverdiene får vi da:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \\ y^1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{32}, \\ z^1 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{32} = \frac{75}{128} \end{aligned}$$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} &\text{Jacobi :} & x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &\text{Gauss-Seidel :} & x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\,\mathbf{f}(x_n,\, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h\,\mathbf{f}(x_n + h,\, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.