Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 11

Fra TMA4130 desember 2003

$\boxed{6}$ Me skriv systemet på vektorfom $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, der

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^3 + 1 \\ x_1^2 - x_1 x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisa er

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3x_2^2 \\ 2x_1 - x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Startvektoren er $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, og den tilsvarande Jacobimatrisa er

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Frå formelarket har me då at neste iterat er $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}$, der $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$ er løysinga av det lineære likningssystemet

$$\mathbf{J}^{(0)} \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

det vil seia

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som har løysing $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det endelege svaret blir derfor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kommentar: Metoden konvergerer mot ei løysing $x_1 = 1.94728\ldots$, $x_2 = 1.43375\ldots$.

Utdelte oppgåver

$\boxed{2}$ a) i) Trapes:

$$T(f) = h\left(\frac{1}{2}f(0.0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + \frac{1}{2}f(0.8)\right) = \underline{0.654851}.$$

ii) Simpson:

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(0.0) + 4f(0.2) + 2f(0.4) + 4f(0.6) + f(0.8)\right) = \underline{0.657696}.$$

Til sammenligning er eksakt svar $\int_{0.0}^{0.8} e^{-x^2}\,dx = 0.657670$.

b) Poenget blir å finne en verdi av h slik at

$$\left|\frac{1}{12}(b-a)f''(\xi)h^2\right| \leq 10^{-5}$$

der $a < \xi < b$ med $b = 0.8$, $a = 0$ og $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Vi får

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad f'''(x) = (12x - 8x^3)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Vi ser at $f'''(x)$ er positiv i hele intervallet $0 < x < 0.8$, dvs. at $f''(x)$ øker jevnt, og har dermed sin maksimale og minimale verdi i endepunktene. Innsetting gir at $|f''(x)| < 2$ for $0 < x < 0.8$. Vi må altså finne h slik at

$$\frac{1}{12}\cdot 0.8 \cdot 2 \cdot h^2 \leq 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad h \leq 8.66 \cdot 10^{-3},$$

noe som oppns med $n = 93$ intervaller.

$\boxed{3}$ I dette tilfellet kommer ikke dataene $T(r)$ fra en "tilstrekkelig deriverbar" funksjon og det har dermed ingen hensikt å bruke høyere ordens metoder som Simpsons formel. Trapesmetoden gir et tilstrekkelig godt resultat. Bruker vi den får vi:

$$\int_{r_e}^{r_0} T(r)\,r\,dr \approx 35415.$$

Dette sammen med

$$\int_{r_e}^{r_0} r\,dr = \frac{1}{2}(r_0^2 - r_e^2) = 62.30$$

gir middeltemperaturen

$$\underline{\underline{T = 568°\mathrm{C}}}.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 18.1

$\boxed{5}$ Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 2.3x_2 &= 16 \\ -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \end{aligned}$$

ved Gausseliminasjon. I dette tilfellet må vi pivotere (bytte om ligningene) siden koeffisienten foran x_1 i den andre ligningen har en større absoluttverdi enn den tilsvarende koeffisienten i den første ligningen. Vi setter i stedet

$$\begin{aligned} -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \\ 1.5x_1 + 2.3x_2 &= 16. \end{aligned}$$

Deretter ganger vi den øverste ligningen med $\frac{1.5}{-4.5} = -\frac{1}{3}$ og trekker fra den nederste. Vi får:

$$\begin{aligned} -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \\ 0x_2 &= 32. \end{aligned}$$

Siden det ikke eksisterer løsninger for den andre ligningen, eksisterer det heller ingen løsninger for ligningssystemet.

$\boxed{11}$ Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 25 \\ -5x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 22x_2 + 23x_3 &= 71 \end{aligned}$$

ved Gausseliminasjon. I dette tilfelle pivoterer vi siden koeffisienten foran x_1 i den andre ligningen har den største absoluttverdien i forhold til de tilsvarende koeffisientene i de andre ligningene. Vi setter i stedet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 7 & 25 \\ 1 & 22 & 23 & 71 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & 23.4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \end{array}\right].$$

Den tredje ligningen har nå høyere koeffisient foran x_2-leddet, så vi bytter dem om:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & 23.4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Siden vi bare har to lineært uavhengige ligninger og tre variable, betyr det at vi vil få uendelig mange løsninger; en løsning som avhenger av en reell variabel a. Vi setter $x_3 = a$, og tilbakesubstituerer. Vi får:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - a \\ x_1 &= 5 - a. \end{aligned}$$

Tilsammen blir dette:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - a \\ x_2 &= 3 - a \\ x_3 &= a, \end{aligned}$$

når a er en reell variabel.

Utdelte oppgåver

$\boxed{5}$ a) Jacobi-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første tre iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.875 \\ 0.875 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.03125 \\ 1.06250 \\ 1.03125 \end{bmatrix}.$$

b) Gauss-Seidel-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første tre iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.187 \\ 0.953 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.953 \\ 1.023 \\ 0.994 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.99414 \\ 1.00292 \\ 0.99926 \end{bmatrix}.$$

En kan se at Gauss-Seidel-metoden konvergerer raskere enn Jacobi. Dette gjelder også generelt.