1 Vi ønsker å finne en tilnærmelse til i punktet $t = 0.2$ til systemet:

$$\begin{cases} x'(t) = x - 4y \\ y'(t) = -x + y \end{cases} \tag{2}$$

med initialbetingelser $x(0) = 1, y(0) = 0$. Systemet er på formen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} y_1 - 4y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

der

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi bruker først Eulers metode for systemer:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n).$$

Dersom vi setter inn våre uttrykk (legg merke til at systemet er *autonomt*, dvs den deriverte er uavhengig av t), får vi følgende resultater, med $h = 0.1$:

n	t	x_n	y_n
0	0	1	0
1	0.100000	1.100000	-0.100000
2	0.200000	1.250000	-0.220000

Videre løser vi samme ligning med 4. ordens eksplisitt Runge-Kutta (Kreyszig, s. 958), med $h = 0.2$. Det er derfor nok å gjøre ett tidssteg for å nå $t = 0.2$. Resultatet blir:

n	t	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_3$	$\mathbf{k}_4$	y_n
0	0					1 0
1	0.200000	0.2000 -0.2000	0.3000 -0.2400	0.3260 -0.2540	0.4684 -0.3160	1.320067 -0.250667

Den eksakte løsningen i punktet $t = 0.2$ er:

$$x(0.2) = \frac{1}{2}(e^{-0.2} + e^{3 \cdot 0.2}) = 1.320425$$
$$y(0.2) = \frac{1}{4}(e^{-0.2} - e^{3 \cdot 0.2}) = -0.250847$$

Vi ser at selv med dobbelt så langt tidssteg, gir RK-metoden en bedre tilnærming enn Eulers metode. Dette er rimelig, siden Euler er en 1. ordens metode og RK-metoden er av 4. orden.

2 Vi skal se på løsningen av Laplaceligningen i 2 dimensjoner:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,$$

med randbetingelser:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \sin(\pi x), \quad && u(x,1) = e^{\pi}\sin(\pi x), \quad && \text{for } 0 \le x \le 1 \\ &u(0,y) = 0, && u(1,y) = 0, && \text{for } 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

a) Vi leter etter en løsning på formen $u(x,y) = f(x)g(y)$. Ved innsetting i Laplaceligningen får vi

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0,$$

som gir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(x)}{g(y)}. \tag{1}$$

Når vi setter inn randbetingelsene får vi:

$$\begin{aligned} u(0,y) =& f(0)g(y) = 0 \\ u(1,y) =& f(1)g(y) = 0 \\ u(x,0) =& f(x)g(0) = \sin(\pi x) \\ u(x,1) =& f(x)g(1) = e^{\pi}\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Siden $g(y)$ ikke kan være konstant lik null for alle y (da får vi bare den trivielle løsningen $u(x,y) = 0$) får vi

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(x)g(0) &= \sin(\pi x) \\ f(x)g(1) &= e^{\pi}\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Altså er

$$f(x) = A\sin(\pi x),$$

hvor A er en konstant. Innsatt i ligning (1) over får vi

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\pi^2 = -\frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Det vil si at vi har

$$\begin{aligned} g''(y) &= \pi^2 g(y), \\ g(y) &= B_1 e^{\pi y} + B_1 e^{-\pi y}, \end{aligned}$$

hvor B_1 og B_2 er konstanter. Tilsammen får vi da

$$\begin{aligned} u(x,y) &= AB_1\sin(\pi x)e^{\pi y} + AB_2\sin(\pi x)e^{-\pi y} \\ &= C_1\sin(\pi x)e^{\pi y} + C_2\sin(\pi x)e^{-\pi y}, \end{aligned}$$

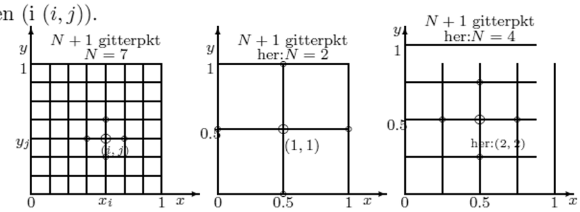
hvor C_1 og C_2 er konstanter.
For å finne den endelige løsningen setter vi inn randbetingelsene. Dette gir $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$, og dermed

$$u(x,y) = \sin(\pi x)e^{\pi y}.$$

b) Skal nå sette opp et numerisk skjema basert på sentrale differenser. Til dette skal vi benytte et uniformt gitter p $N+1$ gitterpunkter i begge variable. Gitterpunktene er $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, når $h = 1/N$ og $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, N$. Vi lar $u_{i,j}$ være den numeriske løsningen i (x_i, y_j). På randen er verdiene bestemt av randverdiene, mens i de indre punktene $((i,j), 1 \le i,j \le N-1)$ får vi det numeriske skjemaet

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} &= 0 \\ u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at vi benytter gitterpunktene som er avmerket i figuren til å regne ut verdien i midten (i (i,j)).



c) La nå $N = 2$. Da har vi bare en verdi å regne ut.

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{4}(u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12}) \\ &= \frac{1}{4}\left(0 + 0 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 6.035. \end{aligned}$$

Den eksakte løsningen er $u(0.5, 0.5) = e^{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.810$. Altså er feilen $e_1 = u_{11} - u(0.5, 0.5) = 1.225$. Så lar vi $N = 4$. Da har vi 9 ukjente. Ligningene for disse

9 ukjente er

$$
\begin{aligned}
u_{12} + u_{21} + 1/\sqrt{2} + 0 - 4u_{11} &= 0\\
u_{31} + u_{11} + u_{22} + 1 - 4u_{21} &= 0\\
0 + u_{21} + u_{32} + 1/\sqrt{2} - 4u_{31} &= 0\\
u_{22} + 0 + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} &= 0\\
u_{32} + u_{12} + u_{32} + u_{12} - 4u_{22} &= 0\\
0 + u_{22} + u_{33} + u_{31} - 4u_{32} &= 0\\
0 + u_{23} + e^{\pi}/\sqrt{2} + u_{12} - 4u_{13} &= 0\\
u_{33} + u_{13} + e^{\pi} + u_{22} - 4u_{23} &= 0\\
0 + u_{23} + e^{\pi}/\sqrt{2} + u_{32} - 4u_{33} &= 0.
\end{aligned}
$$

Med $\vec{u} = (u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33})^T$ får vi ligningssystemet

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\vec{u} =
\begin{bmatrix}
-1/\sqrt{(2)}\\
-1\\
-1/\sqrt{(2)}\\
0\\
0\\
0\\
-e^{\pi}/\sqrt{(2)}\\
-e^{\pi}\\
-e^{\pi}/\sqrt{(2)}
\end{bmatrix}.
$$

Vi skal finne disse ved Gauss-Seidel-metoden. Gauss-Seidel-metoden for $\mathbf{A}\vec{u} = \vec{b}$ har formen

$$
(\mathbf{D} - \mathbf{L})\vec{u}^{(k+1)} = \mathbf{U}\vec{u}^{(k)} + \vec{b},
$$

hvor $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ der $\mathbf{D}$ er diagonalen, $\mathbf{L}$ er nedre triangulær og $\mathbf{U}$ er øvre triangulær. Bruk den eksakte løsningen som startverdier:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}^{(0)} &= (e^{\pi/4}/\sqrt{2}, e^{\pi/4}, e^{\pi/4}/\sqrt{2}, e^{\pi/2}/\sqrt{2}, e^{\pi/2}, e^{\pi/2}/\sqrt{2}, e^{3\pi/2}/\sqrt{2}, e^{3\pi/2}, e^{3\pi/2}/\sqrt{2})^T\\
&= (1.551, 2.193, 1.551, 3.402, 4.810, 3.402, 7.460, 10.55, 4.760)^T.\\
\vec{u}^{(1)} &= (1.575, 2.234, 1.588, 3.462, 4.912, 3.490, 7.594, 10.78, 7.657)^T,\\
\vec{U}^{(2)} &= (1.601, 2.275, 1.618, 3.527, 5.017, 3.573, 7.667, 10.87, 7.702)^T.
\end{aligned}
$$

Feilen i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ blir da $e_2 = |u_{22} - u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = 5.017 - 4.810 = 0.207$, og vi ser at den er mindre enn da vi regnet med $N = 2$.

3

$$
x'' = \cos(x), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{2}
$$

a) Vi innfører nye variable og skriver det som et system.

$$
\begin{aligned}
x' &= y, \quad x(0) = 0\\
y' &= \cos(x), \quad y(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Ved å derivere x' slik at vi får $x'' = y'$ ser vi at vi ender opp med (2) ved å sette inn for $y' = \cos(x)$.

b) Heuns metode er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^*_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n)\\
\boldsymbol{y}_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}^*_{n+1})\right],
\end{aligned}
$$

hvor $\boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{f}$ kan være vektorer. Fra a) skriver vi systemet vårt på vektorform som

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ \cos(x) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}),
$$

hvor vektoren $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Initialvektoren vår blir da $\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at ligningssystemet vårt er *autonomt*, dvs ikke avhengig av t.

Første iter

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_1^* &= \boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{y}_1^*)\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cos(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ \cos(0.1) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Andre iter

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_2^* &= \boldsymbol{y}_1 + h\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{y}_1) = \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1.0998 \\ \cos(0.1050) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2150 \\ 1.1992 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{y}_1 + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{y}_1) + \boldsymbol{f}(t_2, \boldsymbol{y}_2^*)\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1.0998 \\ \cos(0.1050) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1992 \\ \cos(0.2150) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.2199 \\ 1.1983 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Siden det er første element i $\boldsymbol{y}$ som inneholder x, blir svaret $x(0.2) \approx 0.2199$.

$\boxed{4}$ a) Vi deler intervallet $[0, 1]$ i $N = 1/h$ like store deler av lengde h, og betrakter den ukjente funksjonen i de diskrete punktene $x_m = mh$, $m = 0, \ldots, N$. Det samme gjør vi med tidspunktene $t_n = nk$, $n = 0, 1, \ldots$. Forlengs Euler for problemet i oppgaven blir

$$
\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \qquad 1 \le m \le (N-1), \qquad n \ge 0,
$$

$$
u_0^n = u_N^n = 0, \qquad n \ge 1.
$$

b) Ved å bruke algoritmen i a) får vi ligningene som gir oss $x = u_6^1$, $y = u_5^2$ og $z = u_5^3$. Siden

$$
\begin{aligned}
u_5^0 &= \cos(\pi(x_5 - 1/2)) = 1, \\
\frac{u_6^1 - u_6^0}{k} &= \frac{1}{\pi^2}\frac{u_7^0 - 2u_6^0 + u_5^0}{h^2},
\end{aligned}
$$

får vi med

$$
\begin{aligned}
u_7^0 &= \cos(\pi(x_7 - 1/2)) = 0.8090, \\
u_6^0 &= \cos(\pi(x_6 - 1/2)) = 0.9511,
\end{aligned}
$$

at $x = u_6^1 = 0.9133$. (Den numeriske løsningen må være symetrisk om $x = 0.5$ siden problemet er det. Det betyr at vi uten videre kunne ha sagt at $u_6^1 = u_4^1$). Videre får vi

$$
\frac{u_5^2 - u_5^1}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1}{h^2},
$$

som gir $y = u_5^2 = 0.9222$. Ligningen

$$
\frac{u_5^3 - u_5^2}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^2 - 2u_5^2 + u_4^2}{h^2},
$$

som gir oss $z = u_5^3 = 0.8856$.
(NB! Tabellen i oppgaven er feil for elementet u_7^1. Dette er uten betydning for svaret.)

$\boxed{5}$ Ved å bruke formelen for Gauss-Seidels metode får vi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(-x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 1\right) = \frac{1}{10} \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{30}\left(x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 1\right) = \frac{1}{300} + \frac{1}{30} = \frac{11}{300} \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{20}\left(-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right) = -\frac{1}{200} + \frac{22}{6000} = -\frac{8}{6000} = -\frac{1}{750}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{6}$ Den generelle formelen for Heuns metode er

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})\right].$$

Her er $y' = 3xy$, $x > 0$ og $y(0) = 1$ slik at $f(x, y) = 3xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$.

Med $h = 0.3$ får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.3 \\ y^*_1 &= 1 \\ y_1 &= 1 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 3 \cdot 0.3 = 1.135. \end{aligned}$$

Når vi betrakter problemet $y' = 3xy$, $x < 0$ har vi $h = -0.3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ og vi får

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.3 \\ y^*_1 &= 1 \\ y_1 &= 1 - 0.5 \cdot 0.3 \cdot 3 \cdot (-0.3) = 1.135. \end{aligned}$$

Eksakt løsning:

$$y' = 3xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3x \Rightarrow (\ln y)' = 3x \Rightarrow \ln y = \tfrac{3}{2}x^2 + C,$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = e^{3x^2/2}.$$

Når $x = 0.3$ har vi $\frac{3}{2}x^2 = 0.135$ og $e^{0.135} = 1.1445\ldots$. Feilen er ≈ 0.0095. Den samme feilen får vi ved $x = -0.3$.