Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

1 Simpsons metode med $h = 0.25$ gir

$$S = \frac{0.25}{3}(e^2 + 4e^{2.5} + 2e^3 + 4e^{3.5} + e^4) = 23.612505$$

Øvre grense for feilen er gitt ved

$$|I - S| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

med $b = 2$, $a = 1$, $n = 4$ og

$$M_4 = \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = \max_{1 \leq x \leq 2} |2^4 e^{2x}| = 16e^4$$

får vi

$$|I - S| \leq \frac{16e^4}{180 \cdot 4^4} = 0.01895.$$

Simpsons metode med $h = 0.5$ oppgis til å gi tilnærmelsen $\tilde{S} = 23.721559$. En tilnærmelse til feilen i S er gitt ved

$$I - S = \frac{1}{15}(S - \tilde{S}) = -7.27 \cdot 10^{-3}.$$

(Til sammenligning, selv om dette ikke er en del av oppgaven, er feilen $I - S = -7.95 \cdot 10^{-3}$.)

2 Systemet kan ikke løses ved hjelp av Jacobi-iterasjoner slik det står, siden koeffisienten $a_{33} = 0$.

Men ved å sette den siste ligningen først får vi:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ 4x_1 & - & 16x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}.$$

Ikke bare kan Jacobi-iterasjonene utføres, men dette systemet er også diagonal-dominant, og vi kan være sikre på at iterasjonene konvergerer.

En iterasjon gir:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(2 + x_2^{(0)}\right) &&= \frac{3}{4} = 0.750 \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{16}\left(2 - 4x_1^{(0)} - 4x_3^{(0)}\right) &&= \frac{3}{8} = 0.375 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(4 + x_1^{(0)}\right) &&= \frac{5}{4} = 1.250. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Ved å sette $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ får vi systemet:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -(2y_1 + y_1^3 + 0.5y_2). \end{aligned}$$

Når dette skal løses med Heuns metode, lønner det seg å skrive systemet på vektorform. Med $y_1(0) = y(0) = 1$ og $y_2(0) = y'(0) = 0$ blir det

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -(2y_1 + y_1^3 + 0.5y_2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Første skritt med Heuns metode med $h = 0.1$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ -(2 \cdot 1 + 1^3 + 0.5 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.3 \\ -(2 \cdot 1 + 1^3 + 0.5 \cdot (-0.3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.285 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og til slutt

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.9850 \\ -0.2925 \end{bmatrix}$$

Andre skritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.2925 \\ -(2 \cdot 0.9850 + 0.9850^3 + 0.5 \cdot (-0.2925)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0293 \\ -0.2779 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_1 + \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} 0.9558 \\ -0.5704 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{k}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.5794 \\ -(2 \cdot 0.9558 + 0.9558^3 + 0.5 \cdot (-0.5704)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0570 \\ -0.2499 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og til slutt

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.9419 \\ -0.5564 \end{bmatrix}$$

Så $y(0.1) \approx 0.9850$ og $y(0.2) \approx 0.9419$.

$\boxed{4}$ Vi bruker tilnærmelsene

$$u_{xx}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

og

$$u_{yy}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) .$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(1-2u_{11}+u_{21})+\frac{1}{h^2}(1-2u_{11}+u_{12}) &= -1\\
\frac{1}{h^2}(u_{11}-2u_{21}+1)+\frac{1}{h^2}(1-2u_{21}+1) &= -1\\
\frac{1}{h^2}(1-2u_{12}+1)+\frac{1}{h^2}(u_{11}-2u_{12}+1) &= -1\,.
\end{aligned}$$

Setter inn $h = 1/4$ og får ligningene

$$\begin{aligned}
-4u_{11}+u_{21}+u_{12} &= -33/16 = -2.0625\\
u_{11}-4u_{21} &= -49/16 = -3.0625\\
u_{11}-4u_{12} &= -49/16 = -3.0625\,.
\end{aligned}$$

Disse har løsningene

$$u_{11} = 115/112 = 1.0268, u_{12} = u_{21} = 229/224 = 1.0223$$

$\boxed{5}$ Vi bruker polynominterpolasjon. Funksjonen $D(T)$ kan tilnærmes med Lagrange-polynomet

$$\begin{aligned}
D(T) \approx p_3(T) = 12.8\frac{(T-10)(T-15)(T-20)}{(5-10)(5-15)(5-20)} + 11.33\frac{(T-5)(T-15)(T-20)}{(10-5)(10-15)(10-20)}\\
+10.15\frac{(T-5)(T-10)(T-20)}{(15-5)(15-10)(15-20)} + 9.17\frac{(T-5)(T-10)(T-15)}{(20-5)(20-10)(20-15)}
\end{aligned}$$

og

$$D(13) \approx p_3(13) = -12.8\frac{42}{750} + 11.33\frac{112}{250} + 10.15\frac{168}{250} - 9.17\frac{48}{750} = 10.59.$$

Så $D(13°\mathrm{C}) \approx 10.59\,\mathrm{mg/l}$.