Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4125
Matematikk 4N
våren 2004

Løsningsforslag - Øving 1

Fra Kreyszig, avsnitt 5.1

$\boxed{7}$ Formelen $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ gir her $\sin(\omega t+\delta) = \sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta$. Av formlene 7 og 8 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \delta)\} &= \mathcal{L}(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta)\\ &= \mathcal{L}(\sin \omega t)\cos \delta + \mathcal{L}(\cos \omega t)\sin \delta\\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\delta + \frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\delta = \frac{\omega\cos\delta + s\sin\delta}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ For $0 \le t \le 1$ er grafen til $f(t)$ en rett linje med stigningstall -1 som går gjennom punktet $(1, 0)$. Den har da ligning $y - 0 = -(t-1)$, dvs. $y = 1 - t$. Følgelig er $f(t)$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{for } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

og vi kan finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\\ &= \int_0^1 e^{-st}(1-t)\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}(1-t)\Big|_{t=0}^{1} + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}(-1)\,dt\\ &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-s}-1\right)\end{aligned}$$

der vi brukte delvis integrasjon $\int u' \cdot v\,dt = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dt$ med $u' = e^{-st}$ og $v = 1 - t$.

$\boxed{19}$ Siden $s^2 - s - 2 = 0$ for $s = -1$ og $s = 2$, har vi $s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$, og kan bruke delbrøkoppspalting:

$$\frac{-s-10}{s^2-s-2} = \frac{-s-10}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}, \qquad A = 3,\ B = -4.$$

Det gir

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s-10}{s^2-s-2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1} - \frac{4}{s-2}\right\}\\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 3e^{-t} - 4e^{2t}\end{aligned}$$

ved hjelp av formel 6 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, med $a = -1$ og $a = 2$.

$\boxed{22}$ Ved å bruke formel 4 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi, etter litt omforming,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{60+6s^2+s^4}{s^7}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{60}{s^7}+\frac{6}{s^5}+\frac{1}{s^3}\Big\} \\
&= 60\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^7}\Big\} + 6\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^5}\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^3}\Big\} \\
&= \frac{60}{6!}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{6!}{s^7}\Big\} + \frac{6}{4!}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{4!}{s^5}\Big\} + \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{2!}{s^3}\Big\} \\
&= \frac{60}{720}t^6 + \frac{6}{4!}t^4 + \frac{1}{2!}t^2 = \frac{t^6}{12} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{32}$ Vi omskriver først funksjonen ved hjelp av formelen $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ med $u = \frac{1}{2}t$:

$$2e^{-t}\cos^2 \tfrac{1}{2}t = e^{-t}(1+\cos t) = e^{-t} + e^{-t}\cos t.$$

Vi bruker så tabell 5.1, Kreyszig s. 254, og teorem 2, Kreyszig s. 253, (første forskyvningsregel/skiftteorem) med $f(t) = \cos t$, $F(s) = s/(s^2+1)$ og $a = -1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{2e^{-t}\cos^2 \tfrac{1}{2}t\} &= \mathcal{L}\{e^{-t} + e^{-t}f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} + \mathcal{L}\{e^{-t}f(t)\} \\
&= \frac{1}{s+1} + F(s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{37}$ Nevneren $s^2+6s+18$ har ingen reelle nullpunkter og er derfor irredusibel. Vi omskriver funksjonen ved å komplettere kvadratet i nevneren:

$$\frac{3}{s^2+6s+18} = \frac{3}{(s+3)^2+9} = \frac{3}{(s+3)^2+3^2}$$

og bruker Første forskyvningsregel/skiftteorem (Teorem 2, Kreyszig s. 253) med

$$F(s+3) = \frac{3}{(s+3)^2+3^2}, \quad F(s) = \frac{3}{s^2+3^2}, \quad f(t) = \sin 3t.$$

Det gir

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{3}{(s+3)^2+3^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s+3)\} \overset{a=-3}{=} e^{-3t}f(t) = e^{-3t}\sin 3t.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.2

$\boxed{3}$ Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y' + 0{,}2y = 0{,}01t\,, \qquad y(0) = -0{,}25.$$

Av regelen for å Laplacetransformere en derivert (teorem 1, Kreyszig s. 258) og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$sY - y(0) + 0{,}2Y = 0{,}01/s^2 \quad \text{dvs.} \quad sY + 0{,}25 + 0{,}2Y = 0{,}01/s^2.$$

Det gir

$$\begin{aligned}(s+0{,}2)Y &= -0{,}25 + \frac{0{,}01}{s^2} \\ &= \frac{-0{,}25s^2 + 0{,}01}{s^2} = -\frac{0{,}25(s^2-0{,}04)}{s^2} = -\frac{0{,}25(s-0{,}2)(s+0{,}2)}{s^2}.\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$Y = -\frac{0{,}25(s-0{,}2)}{s^2} = \frac{0{,}05}{s^2} - \frac{0{,}25}{s} \quad \text{og} \quad y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 0{,}05t - 0{,}25$$

fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) formel 1 og 2.

$\boxed{9}$ Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -14$$

Av regelen for å Laplacetransformere en $n$te-derivert (teorem 2, Kreyszig s. 259), her med $n = 2$, og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254), formel 6, får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2[sY - y(0)] - 3Y = 6/(s+2)$$

det vil si

$$s^2Y - 2s + 14 + 2sY - 4 - 3Y = 6/(s+2)$$

Det gir

$$(s^2 + 2s - 3)Y = 2s - 10 + \frac{6}{s+2} = \frac{2s^2 - 6s - 14}{s+2}$$

Vi kan faktorisere $s^2+2s-3 = (s+3)(s-1)$, og bruker delbrøkoppspalting for å forenkle uttrykket for Y:

$$Y = \frac{2s^2-6s-14}{(s+2)(s^2+2s-3)} = \frac{2s^2-6s-14}{(s+2)(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-1}$$

Vi får

$$A = -2, \quad B = \tfrac{11}{2}, \quad C = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{og følgelig} \quad Y = -\frac{2}{s+2} + \frac{11/2}{s+3} - \frac{3/2}{s-1}.$$

Dermed får vi fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254):

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = -2e^{-2t} + \tfrac{11}{2}e^{-3t} - \tfrac{3}{2}e^{t}.$$

$\boxed{13}$ Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+4)\} = e^{-4t}$ får vi ved å bruke formel (9) i Teorem 3 (Integralregelen) i Kreyszig 5.2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+4}\right\} = \int_0^t e^{-4\tau}\,d\tau = -\tfrac{1}{4}e^{-4\tau}\Big|_0^t = \tfrac{1}{4}(1 - e^{-4t})$$

Vi kunne også brukt delbrøkoppspalting og tabell 5.1 for å finne $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4s)\}$, men siden s er en faktor i nevneren kan vi bruke Integralregelen.