TMA4125
Matematikk 4N
våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 2

Fra Kreyszig, avsnitt 5.2

$\boxed{19}$ Her bruker vi tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) og varianten (9) av Teorem 3, Kreyszig s. 262 (Integralregelen), 2 ganger for å finne den inverse Laplacetransformerte:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9(s+1)}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9s}{s^2+3^2} + \frac{3\cdot 3}{s^2+3^2}\right\} = 9\cos 3t + 3\sin 3t \qquad \text{(Tabell 5.1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{9(s+1)}{s^2+9}\right)\right\} = \int_0^t (9\cos 3\tau + 3\sin 3\tau)\,d\tau \qquad \text{(Teorem 3)}$$

$$= \Big[3\sin 3\tau - \cos 3\tau\Big]_0^t = 3\sin 3t - \cos 3t + 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+9}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{9(s+1)}{s(s^2+9)}\right)\right\}$$

$$= \int_0^t (3\sin 3\tau - \cos 3\tau + 1)\,d\tau \qquad \text{(Teorem 3)}$$

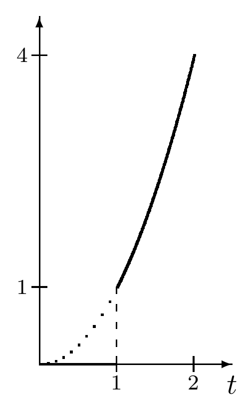
$$= \Big[-\cos 3\tau - \frac{1}{3}\sin 3\tau + \tau\Big]_0^t = 1 + t - \cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t$$

Vi kunne også brukt delbrøkoppspalting og deretter tabell 5.1 for å finne den inverse Laplacetransformerte her. Men i oppgaveteksten står det at vi skal bruke Integralregelen.

Fra Kreyszig, avsnitt 5.3

$\boxed{5}$

$$t^2u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ t^2 & \text{for } t > 1 \end{cases}$$



Vi omskriver $t^2u(t-1)$ slik at den blir av formen $f(t-1)u(t-1)$. Da kan vi finne den Laplacetransformerte ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).

$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$$
$$t^2u(t-1) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]u(t-1)$$

Da har vi $t^2u(t-1) = f(t-1)u(t-1)$ der $f(t-1) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$ og flgelig $f(t) = t^2 + 2t + 1$. Siden $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$ fr vi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 2/s^3 + 2/s^2 + 1/s$ og dermed

$$\mathcal{L}\{t^2u(t-1)\} = \mathcal{L}\{f(t-1)u(t-1)\} = F(s)e^{-s} = \Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)e^{-s}.$$

Alternativt kan vi finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2u(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^2u(t-1)\,dt = \int_1^\infty e^{-st}t^2\,dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-st}t^2\Big|_{t=1}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_1^\infty e^{-st}2t\,dt && \text{(delvis integrasjon)} \\
&= \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}2t\Big|_{t=1}^{\infty} + \frac{1}{s^2}\int_1^\infty e^{-st}2\,dt && \text{(delvis integrasjon)} \\
&= \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_{t=1}^{\infty} = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^3}e^{-s}
\end{aligned}$$

der vi, når vi satte inn øvre grense, brukte at $\lim_{t\to\infty} e^{-st}t^n = 0$ for $s > 0$.

10

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

Me utnyttar sprangfunksjonen $u(t)$ og skriv $f(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t-2))$. Vidare veit me at $u(t-2)e^{-t} = e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}$, slik at me kan finna den Laplacetransformerte ved å nytta transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).

$$\begin{aligned}
f(t) &= (1 - e^{-t})(u(t) - u(t-2)) \\
&= u(t) - u(t)e^{-t} - u(t-2) + e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}.
\end{aligned}$$

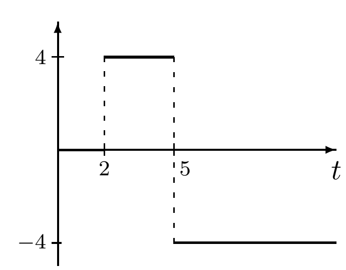
Dette gjev oss når me bruker formel 6 i tabell 5.1 s. 254 i Kreyszig

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t)e^{-t}\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} + e^{-2}\mathcal{L}\{u(t-2)e^{-(t-2)}\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{s} + e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) + \frac{1}{s+1}(e^{-2(s+1)} - 1).
\end{aligned}$$

Oppgåva kan også løysast ut frå definisjonen av den Laplacetransformerte.

14

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{4(e^{-2s} - 2e^{-5s})}{s}\Big\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-2s}}{s}\Big\} - 8\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-5s}}{s}\Big\} \\
&= 4u(t-2) - 8u(t-5) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 4 & \text{for } 2 < t < 5 \\ -4 & \text{for } t > 5 \end{cases}
\end{aligned}$$



23

$$y'' + 9y = r(t) = \begin{cases} 8\sin t & \text{for } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{for } t > \pi, \end{cases} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$$

Vi har

$$r(t) = 8\sin t - 8\sin t\, u(t-\pi) = 8\sin t + 8\sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

siden $\sin t = -\sin(t-\pi)$, og bruker Tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) og 2. skiftteorem (Teorem 1, Kreyszig s. 267) for å Laplacetransformere $r(t)$. Den Laplacetransformerte ligningen blir følgelig

$$s^2Y - 4 + 9Y = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{8}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Vi løser ut Y, og omformer ved å bruke delbrøkoppspalting:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{4}{s^2+9} + \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)}e^{-\pi s} \\ &= \frac{4}{s^2+9} + \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right) + \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right)e^{-\pi s} \\ &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+3^2} + \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2}\right)e^{-\pi s}. \end{aligned}$$

(En liten snarvei i delbrkoppspaltingen er legge merke til at vi ikke har frstegradsledd i brken $8/[(s^2+1)(s^2+9)]$ som skal delbrkoppspaltes. Setter vi $u = s^2$, kan vi skrive

$$\frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{8}{(u+1)(u+9)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+9}.$$

Vi regner ut $A = 1$ og $B = -1$ og dermed blir $8/[(s^2+1)(s^2+9)] = 1/(s^2+1) - 1/(s^2+9)$.)

Tilslutt bruker vi igjen Tabell 5.1 og 2. skiftteorem for å finne $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$:

$$\begin{aligned} y &= \sin t + \sin 3t + [\sin(t-\pi) - \tfrac{1}{3}\sin 3(t-\pi)]u(t-\pi) \\ &= \sin t + \sin 3t + [-\sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t]u(t-\pi) = \begin{cases} \sin t + \sin 3t & \text{for } 0 < t < \pi \\ \tfrac{4}{3}\sin 3t & \text{for } t > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

(Merk at $\sin(t-\pi) = -\sin t$ og $\sin 3(t-\pi) = \sin 3t\cos 3\pi - \cos 3t \sin 3\pi = -\sin 3t$.)

28

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Sett $Y = \mathcal{L}(y)$. Laplacetransformerer ligningen ($\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$) og får

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + 4[sY - y(0)] + 5Y = e^{-s}$$

dvs.

$$(s^2 + 4s + 5)Y = 3 + e^{-s}$$

og følgelig

$$Y = \frac{3 + e^{-s}}{s^2+4s+5} = \frac{3}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}e^{-s}.$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\Big\} = e^{-2t}\sin t$$

ifølge skiftteorem 1. Ved også å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}(Y) &= 3e^{-2t}\sin t + e^{-2(t-1)}\sin(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 3e^{-2t}\sin t & \text{for } 0 < t < 1 \\ e^{-2t}\left[3\sin t + e^2\sin(t-1)\right] & \text{for } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.4

$\boxed{7}$ Vi skal finne $\mathcal{L}(te^{-t}\sin t)$ ved hjelp av formelen (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275. Siden $\mathcal{L}(\sin t) = 1/(s^2+1)$, er $\mathcal{L}(e^{-t}\sin t) = 1/[(s+1)^2+1]$ iflge skiftteorem 1. Dermed får vi,

$$\mathcal{L}(te^{-t}\sin t) \overset{(1)}{=} -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^2+1} = -\left(\frac{-1}{[(s+1)^2+1]^2}\cdot 2(s+1)\right) = \frac{2(s+1)}{[(s+1)^2+1]^2}.$$

Vi kunne ogs ha brukt formelen (1) frst og deretter skiftteoremet:

$$\mathcal{L}(t\sin t) \overset{(1)}{=} -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(e^{-t}t\sin t) = \frac{2(s+1)}{[(s+1)^2+1]^2}.$$

$\boxed{11}$ Me skal finna den inverse transformen til

$$F(s) = \frac{s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2}.$$

Frå formel 7 i tabell 5.1 side 254 i Kreyszig veit me at

$$G(s) = \mathcal{L}\{\cos \pi t\} = \frac{s}{s^2+\pi^2}.$$

Vidare har me

$$G'(s) = -\frac{s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2}$$

Derivasjon av Laplacetransformen til ein funksjon svarar til å multiplisera funksjonen med $-t$. Altså $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$. Dette gjev oss svaret

$$f(t) = t\cos \pi t.$$