Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 6

Fra Kreyszig, avsnitt 10.5

5 Vi skal finne den komplekse Fourierrekka til $f(x) = x,\ 0 < x < 2\pi$.

Siden $f(x)$ er 2π-periodisk spiller det ingen rolle om integrasjonsintervallet forskyves. Formel (8) på side 548 i Kreyszig (8. utgave) gir dermed

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}\,dx.$$

Vi må skille mellom $n = 0$ og $n \neq 0$ og får (ved delvis integrasjon når $n \neq 0$):

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi, \qquad (n = 0)\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{in}e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{in}\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2\pi}{in}e^{-2\pi ni} - \frac{e^{-2\pi ni}-1}{(in)^2}\right] = \frac{i}{n} \qquad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

siden $1/i = -i$ og $e^{-2\pi ni} = \cos 2\pi n - i\sin 2\pi n = 1$. Ergo har $f(x)$ kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \pi + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n}e^{inx} = \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{i}{n}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}.$$

7 Vi skal vise at de komplekse Fourierkoeffesientene til en odde (ulike) funksjon er rent imaginære, og at de til en jevn (like) funksjon er reelle.

De komplekse Fourierkoeffisientene er gitt i Kreyszig 10.5 formel (9)/Rottmann s.175:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\Big(f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} - if(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx.$$

For en odde funksjon $f(x)$ er $\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx = 0$, og følgelig

$$c_n = -i\cdot\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad \text{dvs. } c_n \text{ er rent imaginær.}$$

For en jevn funksjon $f(x)$ er $\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx = 0$, og følgelig

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad \text{dvs. } c_n \text{ er reell.}$$

$\boxed{8}$ Fra den komplekse Fourierrekka (i oppgave 5) kan vi finne den vanlige (reelle) Fourierrekka for funksjonen $f(x) = x$, $0 < x < 2\pi$:

$$f(x) = \pi + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{i}{n} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx} = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{-n} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}$$
$$= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} \left(e^{inx} - e^{-inx} \right) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} \cdot 2i \sin nx = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin nx}{n}.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 10.6

$\boxed{5}$ Den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt, \qquad |\omega| \neq 1, 2, \dots, N \tag{$*$}$$

har formen $y = y_h + y_p$ der y_h er en generell løsning av $y'' + \omega^2 y = 0$ og y_p er en partikulær løsning av $(*)$.

Den karakteristiske ligningen for $y'' + \omega^2 y = 0$ er $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ med rtter $\lambda = \pm i\omega$ og flgelig er $y_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. En partikulr lsning y_p av $(*)$ har formen

$$y_p = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos nt + B_n \sin nt \right).$$

(Merk at det ikke er ndvendig med modifikasjon her, ingen av leddene i summen er lsning av $y'' + \omega^2 y = 0$ siden $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$.) Vi setter inn $y = y_p$ i $(*)$ for bestemme koeffisientene A_n og B_n:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(-n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt \right) + \omega^2 \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos nt + B_n \sin nt \right) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt.$$

Ved sammenligne koeffisientene foran $\cos nt$, henholdsvis $\sin nt$, p begge sider av likhetstegnet fr vi

$$(-n^2 + \omega^2) A_n = 0 \qquad \text{og} \qquad (-n^2 + \omega^2) B_n = b_n.$$

Det gir $A_n = 0$ og $B_n = b_n / (\omega^2 - n^2)$, $n = 1,\, 2,\, \dots,\, N$. Generell lsning av $(*)$ blir da

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt.$$

$\boxed{7}$ Vi skal løse differensialligningen $y'' + \omega^2 y = r(t)$ der

$$r(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{for } -\pi < t < 0 \\ \pi - t & \text{for } 0 < t < \pi \end{cases} \qquad \text{og } r(t + 2\pi) = r(t),\ |\omega| \neq 0,\ 1,\ 3,\ 5, \dots$$

Generell løsning er $y = y_h + y_p$ der y_h er generell løsning av $y'' + \omega^2 y = 0$ og y_p er en partikulær løsning av $y'' + \omega^2 y = r(t)$.

Her blir $y_h = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$. Vi kan finne y_p ved å utvikle $r(t)$ i Fourierrekke og bestemme en partikulær løsning for hvert av leddene i Fourierrekka. Summen av de partikulre lsningene vi da finner vil være en partikulær løsning av den gitte differensialligningen.

Fourierrekka til $r(t)$ blir en cosinusrekke da $r(t)$ er en jevn funksjon (tegn figur). Vi får

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2}(\pi - t)^2\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[(\pi - t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}\,dt\Big] \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 2,\,4,\,6,\,\dots \\ 4/(n^2\pi) & \text{for } n = 1,\,3,\,5,\,\dots \end{cases} \\
r(t) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\Big).
\end{aligned}
$$

Så betrakter vi differensialligningene

$$
(1)\quad y'' + \omega^2 y = \frac{\pi}{2} \qquad \text{og} \qquad (2)\quad y'' + \omega^2 y = \frac{4\cos nt}{\pi n^2} \quad (n = 1,\,3,\,5,\,\dots)
$$

svarende til hvert av leddene i Fourierrekka. Partikulære løsninger vil være av formen

$$
(1')\quad y_{p_0} = A_0 \quad \text{og} \quad (2')\quad y_{p_n} = A_n\cos nt + B_n \sin nt \quad (n = 1,\,3,\,5,\,\dots).
$$

Innsetting av $(1')$ i (1) gir $A_0 = \pi/(2\omega^2)$. Ved innsetting av $(2')$ i (2) får vi

$$
\big(-n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt\big) + \omega^2\big(A_n \cos nt + B_n \sin nt\big) = \frac{4\cos nt}{\pi n^2}
$$

som gir $A_n = 4/[\pi n^2(\omega^2 - n^2)]$ og $B_n = 0$. En partikulær løsning av $y'' + \omega^2 y = r(t)$ er følgelig

$$
y_p = y_{p_0} + y_{p_1} + y_{p_3} + \cdots = \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos t}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 3t}{9(\omega^2 - 9)} + \frac{\cos 5t}{25(\omega^2 - 25)} + \cdots\Big).
$$

(En formell løsning, siden vi ikke verifiserer at rekka konvergerer, og at summen tilfredsstiller differensialligningen.)

Generell løsning $y = y_h + y_p$ blir

$$
y = C_1\cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos t}{\omega^2 - 1} + \frac{\cos 3t}{9(\omega^2 - 9)} + \frac{\cos 5t}{25(\omega^2 - 25)} + \cdots\Big).
$$

Fra Kreyszig, avsnitt 10.7

$\boxed{7}$ Funksjonen $f(x)$ er odde så Fourierrekka blir ei sinusrekke.

Ved å bruke formel 121 i Rottmann s. 144 (eller delvis integrasjon) finn vi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\pi}{(2m-1)^2} = \frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)^2} \qquad (m=1,2,3,\dots) \\ b_{2m} &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos m\pi}{4m}\right] = \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \qquad (m=1,2,3,\dots). \end{aligned}$$

Rekkeutviklinga blir derfor (merk at $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$):

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[\frac{2}{\pi(2m-1)^2}\sin(2m-1)x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \cdots. \end{aligned}$$

Vi har altså

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = -\frac{2}{9\pi}, \quad b_4 = -\frac{1}{4}, \quad b_5 = \frac{2}{25\pi}.$$

Kvadratfeilen får sitt minimum E_N^* for Fourierpolynomet $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$. Altså

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x \\ F_2(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ F_3(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x \\ F_4(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \\ F_5(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x. \end{aligned}$$

Etter formel (6) i Kreyszig 10.7 har vi

$$E_N^* = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \pi\sum_{n=1}^{N} b_n^2.$$

Her er $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx = \pi^3/12$, og vi legg merke til at $E_{N+1}^* = E_N^* - \pi b_{N+1}^2$. Vi får

$$\begin{gathered} E_1^* = \pi^3/12 - \pi b_1^2 \approx 1.311, \qquad E_2^* = E_1^* - \pi b_2^2 \approx 0.525, \qquad E_3^* = E_2^* - \pi b_3^2 \approx 0.509 \\ E_4^* = E_3^* - \pi b_4^2 \approx 0.313, \qquad E_5^* = E_4^* - \pi b_5^2 \approx 0.311. \end{gathered}$$

$\boxed{11}$ Fra Kreyszig 10.2 oppgave 7 med fasit har vi

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\Big(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + - \cdots\Big)$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Parsevals identitet, Kreyszig 10.7 formel (8), gir da

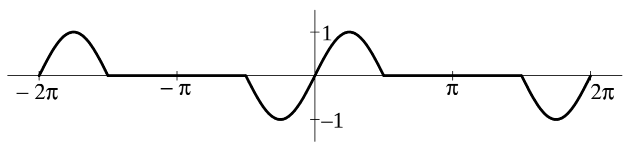
$$2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\right)^2\,dx,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(2\cdot\frac{\pi^4}{5} - 2\cdot\frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90} \qquad (\approx 1.082).$$

De fire første partialsummene er

$$S_1 = 1, \quad S_2 = S_1 + 1/2^4 \approx 1.063, \quad S_3 = S_2 + 1/3^4 \approx 1.075, \quad S_4 = S_3 + 1/4^4 \approx 1.079.$$

Fra SIF5013 mai 2001

$\boxed{3}$ **a)**



$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin 2x\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}$$

For $n \neq 2$ er

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 2m \quad \text{og} \quad b_n = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \quad \text{for } n = 2m+1$$

siden $\sin(2m\cdot\pi/2) = 0$ og $\sin[(2m+1)\pi/2] = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$.
Fourierrekka til $f(x)$ er en sinusrekke, og $f(x)$ er kontinuerlig for alle x. Altså har vi

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)}\sin nx$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\sin(2m+1)x \qquad \text{for alle } x.$$

b) For $x = \pi/2$ er $f(x) = 0$ og $\sin(2m+1)x = (-1)^m$. Det gir

$$0 = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)} = \frac{1}{(-1)\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots = 0.$$

For å finne summen av den andre rekka, kan vi bruke Parsevals identitet:

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2} = \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)\Big/\frac{16}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

Fra SIF5016 desember 1999

$\boxed{1}$ **a)** Finn først likninga for $f(t)$ frå grafen.

$$f(t) = \begin{cases} -\pi - t & \text{for } -\pi < t < 0 \\ t & \text{for } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Ved hjelp av (6) side 531 i Kreyszig finn me Fourierkoeffisientane.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0 \quad \text{(ser direkte frå grafen)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -(t+\pi)\cos nt\,dt + \int_0^{\pi} t\cos nt\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\Big[\underbrace{-(t+\pi)\frac{\sin nt}{n}}_{0}\Big]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nt}{n}\,dt + \Big[\underbrace{t\frac{\sin nt}{n}}_{0}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\Big[-\frac{\cos nt}{n^2}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[\frac{\cos nt}{n^2}\Big]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ jamn} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{for } n \text{ odde} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -(t+\pi)\sin nt\,dt + \int_0^{\pi} t\sin nt\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\Big[(t+\pi)\frac{\cos nt}{n}\Big]_{-\pi}^{0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nt}{n}\,dt}_{0} - \Big[t\frac{\cos nt}{n}\Big]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}\,dt}_{0}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\pi\frac{1}{n} - \pi\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ jamn} \\ \frac{2}{n} & \text{for } n \text{ odde} \end{cases}$$

$$f(t) \sim \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odde}}}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\sin nt - \frac{4}{\pi n^2}\cos nt\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2\sin(2m+1)t}{2m+1} - \frac{4\cos(2m+1)t}{\pi(2m+1)^2}\right)$$

b) La $S(t)$ vera summen av rekka i **a)**.

$$
\begin{aligned}
S(0) &= \frac{1}{2}\left[f(0+) + f(0-)\right] = \frac{1}{2}\left[0 + (-\pi)\right] = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(frå grafen i } \mathbf{a)}\text{)}. \\
S(\pi) &= \frac{1}{2}\left[f(\pi+) + f(\pi-)\right] = \frac{1}{2}\left[0 + \pi\right] = \frac{\pi}{2} \\
S(t) &= f(t) = f(t - 2\pi) = -\pi - (t - 2\pi) = \pi - t, \quad \pi < t < 2\pi
\end{aligned}
$$

sidan $f(t)$ er periodisk med periode 2π og $f(t) = -\pi - t$ for $-\pi < t < 0$.