Fra Kreyszig, avsnitt 10.7

7 Funksjonen $f(x)$ er odde så Fourierrekka blir ei sinusrekke.

Ved å bruke formel 121 i Rottmann s. 144 (eller delvis integrasjon) finn vi

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
b_{2m-1} &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\pi}{(2m-1)^2} = \frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)^2} \qquad (m = 1,2,3,\dots) \\
b_{2m} &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos m\pi}{4m}\right] = \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \qquad (m = 1,2,3,\dots).
\end{aligned}
$$

Rekkeutviklinga blir derfor (merk at $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$) :

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[\frac{2}{\pi(2m-1)^2}\sin(2m-1)x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x + \cdots .
\end{aligned}
$$

Vi har altså

$$
b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = -\frac{2}{9\pi}, \quad b_4 = -\frac{1}{4}, \quad b_5 = \frac{2}{25\pi}.
$$

Kvadratfeilen får sitt minimum E_N^* for Fourierpolynomet $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$. Altså

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x \\
F_2(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \\
F_3(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x \\
F_4(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \\
F_5(x) &= \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{25\pi}\sin 5x.
\end{aligned}
$$

Etter formel (6) i Kreyszig 10.7 har vi

$$
E_N^* = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \pi\sum_{n=1}^{N} b_n^2.
$$

Her er $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx = \pi^3/12$, og vi legg merke til at $E^*_{N+1} = E^*_N - \pi b^2_{N+1}$. Vi får

$$E_1^* = \pi^3/12 - \pi b_1^2 \approx 1.311, \qquad E_2^* = E_1^* - \pi b_2^2 \approx 0.525, \qquad E_3^* = E_2^* - \pi b_3^2 \approx 0.509$$
$$E_4^* = E_3^* - \pi b_4^2 \approx 0.313, \qquad E_5^* = E_4^* - \pi b_5^2 \approx 0.311.$$

12 Vi fant i oppgave 10.2.13 at den 2π-kontinuerlige funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

har fourierrekken

$$\frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - ...\right).$$

dvs. fourierkoeffisienter

$$a_0 = b_n = 0 \qquad \text{og}$$
$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \frac{4}{\pi n}(-1)^{(n-1)/2}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

Betrakter summen

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} = \frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...)$$

Videre kikker vi på integralet

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} dx = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Vi setter inn i Parsevals identitet og finner

$$(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...) = \frac{\pi^2}{8}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 10.8

2 Vi skal bruke Fourierintegral til å vise at

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{hvis } 0 \le x < 1 \\ \pi/4 & \text{hvis } x = 1 \\ 0 & \text{hvis } x > 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Av svaret ser vi at vi skal betrakte en jevn funksjon $f(x)$ som oppfyller $f(x) = \pi/2$ for $0 < x < 1$ og $f(x) = 0$ for $x > 1$. Fourierintegralet til $f(x)$ blir et cosinusintegral ((11) Kreyszig s. 562) der

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx = \int_0^1 \cos wx\,dx = \left.\frac{\sin wx}{w}\right|_0^1 = \frac{\sin w}{w}.$$

Følgelig kan $f(x)$ representeres ved Forierintegralet

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w}\cos wx\,dw. \qquad (1)$$

For $x = 1$ er $f(x)$ diskontinuerlig, og middelverdien av grenseverdien for $f(x)$ fra høyre (0) og venstre ($\pi/2$) er $\pi/4$. Dermed følger $(*)$ av (1) og teoremet om Fourierintegral (Kreyszig s. 559).

17 Vi bruker formel (12) i på side 562 i Kreyszig, samt relasjonene $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ og $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$:

$$\begin{aligned}
B(w) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^v \sin wv dv \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2i}\int_0^1 \left[e^{v(1+iw)} - e^{v(1-iw)}\right] dv \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1+iw}e^{v(1+iw)} - \frac{1}{1-iw}e^{v(1-iw)}\right]_{v=0}^1 \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+iw}e^{1+iw} - \frac{1}{1-iw}e^{1-iw} - \frac{1}{1+iw} + \frac{1}{1-iw}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2i}\left(e\frac{(1+iw)e^{iw} - (1-iw)e^{-iw}}{1+w^2} + \frac{2iw}{1+w^2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+w^2}\frac{1}{2i}\left[e\underbrace{(e^{iw} - e^{-iw})}_{=2i\sin w} - ew\underbrace{i(e^{iw} + e^{-iw})}_{=2i\cos w} + 2iw\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{w - e(w\cos w - \sin w)}{1+w^2},
\end{aligned}$$

så, på formen (13) på side 562 i Kreyszig:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w - e(w\cos w - \sin w)}{1+w^2}\sin xw dw$$

Fra Kreyszig, avsnitt 10.10

7 Vi skal finne den Fouriertransformerte av

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Ved bruk av definisjonen av Fouriertransformasjonen (ligning (6), side 570 i Kreyszig(8. utg.)) og delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-x}e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-1-iw}xe^{-(1+iw)x} - \frac{1}{(-1-iw)^2}e^{-(1+iw)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}.
\end{aligned}$$

Kommentar til innsetting av grensene i utregningen over:

$$xe^{-x}e^{-iwx} = xe^{-x}(\cos\omega x - i\sin\omega x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

idet $xe^{-x} = x/e^x \to 0$ og $\sin\omega x$ og $\cos\omega x$ er begrenset.

8 Setter inn i definisjonen av Fouriertransformen og løser direkte:

$$f(x) = e^{-|x|}$$

gir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+iw)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-iw}e^{(1-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+iw}e^{-(1+iw)x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-iw}+\frac{1}{1+iw}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}
\end{aligned}$$

Legg her merke til at

$$|e^{(1-iw)x}| = |e^{x}|\cdot|e^{-iwx}| = |e^{x}|\cdot 1 = e^{x} \to 0 \text{ når } x \to -\infty$$

dvs. den nedre grensen $-\infty$ bidrar ikke. Det samme gjelder for ∞ for $e^{-(1+iw)x}$ når $x \to +\infty$.

10 Gitt $f(x) = |x|$ for $|x| < 1$, 0 for $|x| > 1$. Vi søker den Fouriertransformerte til $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}|x|e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}|x|(\cos wx - i\sin wx)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(\underbrace{|x|\cos wx}_{\text{jevn funksjon}} - i\underbrace{|x|\sin wx}_{\text{odde funksjon}})\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} x\cos wx\,dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x\frac{\sin wx}{w}+\frac{\cos wx}{w^2}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin w}{w}+\frac{\cos w - 1}{w^2}\right]
\end{aligned}$$

Alternativt kan vi innføre $|x| = x$ for $x > 0$, $|x| = -x$ for $x < 0$:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}|x|e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-1}^{0}(-x)e^{-iwx}\,dx + \int_{0}^{1} xe^{-iwx}\,dx\right] = \dots$$

Et alternativt svar (som fåes ved delvis integrasjon av eksponentialfunksjon) er:

$$\widehat{f}(w) = \frac{-1}{w^2} + \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{iw}\right)\cosh(iw)$$

oppg. 4 aug 2001 Ligningen kan skrives $f(x) = e^{-|x|} - 4f(x) * e^{-|x|}$. Vi setter $\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ og Fouriertransformerer ligningen ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte.

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2} - 4\sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

$$\left(1+\frac{8}{1+w^2}\right)\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{9+w^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{3^2+w^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{1}{3}e^{-3|x|},$$

der vi inverstransformerte ved hjelp av den oppgitte Fouriertransformerte med $a = 3$.

oppg. 4 mai 2002 Me får

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{iw}e^{-iwx}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}w}\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}.$$

Me nyttar så Eulers formel og formelen for invers Fouriertransformasjon:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwx}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}(\cos wx + i\sin wx)\,\mathrm{d}w.$$

Ved å setja $x = 2$, ta realdelen av integralet og nytta at $f(x)$ er kontinuerleg og reell får me:

$$\frac{1}{w}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos 2w\,\mathrm{d}w = f(2) = 0.$$

Sidan integranden $\frac{\sin w \cos 2w}{w}$ er ein jamn funksjon, følgjer det at:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos 2w}{w}\,\mathrm{d}w = 0.$$