TMA4125
Matematikk 4N
våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 8

Fra Kreyszig, avsnitt 11.1

14a Vi skal verifisere at u tilfredsstiller Poissons ligning $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$.

$u(x,y)=x^2+y^2,\ f(x,y)=4:$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2+2=4=f(x,y)$$

$u(x,y)=\cos(xy),\ f(x,y)=-(x^2+y^2)\cos(xy):$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-y^2\cos(xy)-x^2\cos(xy)=-(x^2+y^2)\cos(xy)=f(x,y)$$

$u(x,y)=y/x,\ f(x,y)=2y/x^3:$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-y}{x^2}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{x}\Big)=\frac{2y}{x^3}+0=f(x,y)$$

19 Vi skal løse den partielle differensialligningen $u_{xy}=u_x$.

Vi innfører $p=u_x$. Da kan ligningen skrives $p_y=p$, og den kan løses som en separabel differensialligning for $p=p(x,y)$ der y er fri variabel og x er parameter:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=p,\quad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}=1,\quad \ln p(x,y)=y+C_1(x),\quad p(x,y)=e^{y+C_1(x)}=C(x)e^y.$$

Vi kunne også løst $p_y-p=0$ som en l ineær første ordens differensialligning.

Nå har vi

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p=C(x)e^y$$

og integrasjon mhp. x gir

$$u(x,y)=f(x)e^y+g(y)\qquad \text{der}\qquad f(x)=\int C(x)\,dx\,;$$

her er $f(x)$ og $g(y)$ vilkårlige funksjoner.

Fra Kreyszig, avsnitt 11.3

$\boxed{3}$ Vi skal finne utslaget $u(x,t)$ for en svingende streng med lengde $L = \pi$ når $c^2 = 1$, initial hastighet er 0 og initial form er gitt ved funksjonen $k(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)$. Vi søker altså løsningen av den 1-dimensjonale bølgeligningen

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{for } t \geq 0 \tag{2}$$

og intialbetingelser

$$u(x,0) = k\sin x - \tfrac{1}{2}k\sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3}$$

Fra Kreyszig 11.3 ligning (11) vet vi at

$$u_n(x,t) = (B_n \cos nt + B_n^* \sin nt)\sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

er en løsning av (1) som oppfyller (2). (Her er $\lambda_n = cn\pi/L = n$ og $n\pi/L = n$.)

Ifølge superposisjonsprinsippet (Kreyszig 11.1 Teorem 1) er en sum av løsninger av (1) også løsning av (1). En sum av løsninger som oppfyller (2) vil også oppfylle (2).

Siden $u_n(x,0) = B_n \sin nx$ og $(u_n)_t(x,0) = nB_n^* \sin nx$, ser vi av (3) at $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ vil oppfylle (3) dersom vi velger $B_1 = k$, $B_1^* = 0$ i u_1 og $B_2 = -k/2$, $B_2^* = 0$ i u_2.

Løsningen blir altså

$$u(x,t) = k\cos t \sin x - \tfrac{1}{2}k\cos 2t \sin 2x = k(\cos t \sin x - \tfrac{1}{2}\cos 2t \sin 2x).$$

(Verifiser ved innsetting at $u(x,t)$ passer i (1) og at (2) og (3) er oppfylt.)

$\boxed{4}$ Vi skal finne utslaget $u(x,t)$ for en svingende streng med lengde $L = \pi$ når $c^2 = 1$, initial hastighet er 0 og initial form er gitt ved funksjonen $0.1x(\pi - x)$. Vi søker altså løsningen av den 1-dimensjonale bølgeligningen

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{for } t \geq 0 \tag{2}$$

og intialbetingelser

$$u(x,0) = 0.1x(\pi - x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3}$$

Fra Kreyszig 11.3 vet vi at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cos nt + B_n^* \sin nt)\sin nx$$

($\lambda_n = cn\pi/L = n$ og $n\pi/L = n$) er en (formell) løsning av (1) som oppfyller (2).

Vi bruker så initialbetingelsene (3) til å bestemme koeffisientene B_n og B_n^*. Strengens startfasong gir

$$0.1x(\pi - x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Vi ser at B_n må være koeffisienten b_n i Fouriersinusrekka til funksjonen $0.1x(\pi - x)$ på intervallet $0 \le x \le \pi$:

$$\begin{aligned}
B_n = b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0.1x(\pi - x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{0.2}{\pi}\left[\underbrace{-x(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right] \\
&= \frac{0.2}{\pi}\left[\underbrace{(\pi - 2x)\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}(-2)\frac{\sin nx}{n^2}\,dx\right] \\
&= \frac{0.4}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{0.4(1 - \cos n\pi)}{\pi n^3} = \begin{cases} 0.8/(\pi n^3) & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall} \end{cases}
\end{aligned}$$

Videre gir starthastighet 0 at alle koeffisientene B_n^* blir 0. Dermed blir svaret

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{0.8}{\pi}\left(\cos t \sin x + \frac{\cos 3t \sin 3x}{3^3} + \frac{\cos 5t \sin 5x}{5^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{0.8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)t \sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}.
\end{aligned}$$

(En formell løsning av (1) siden vi ikke verifiserer at rekka konvergerer og at summen tilfredsstiller (1).)

$\boxed{7}$ Me skal finna $u(x,t)$ for strengen med lengd $L = \pi$ når $c^2 = 1$, starthastigheten er 0 og startutsvinget er som vist i figuren i oppgåva. Me kan skriva

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

der

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}.$$

Den generelle løysinga finn me i formel 12 side 591 i Kreyszig

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cos\frac{cn\pi t}{L} + B_n^* \sin\frac{cn\pi t}{L})\sin\frac{n\pi}{L}x$$

med

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \\
B_n^* &= \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Her vil $B_n^* = 0$ og

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,\dots \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n = 1,5,9,\dots \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} & n = 3,7,11,\dots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Løysinga vert dermed

$$
u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\left(\cos t\sin x - \frac{1}{3^2}\cos 3t\sin 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5t\sin 5x - \frac{1}{7^2}\cos 7t\sin 7x + \dots\right).
$$