

Fra Kreyszig, avsnitt 11.5

13 Vi skal finne temperaturen $u(x, t)$ i en stav ($L = \pi$, $c = 1$) som er helt isolert og har initialtemperatur $f(x) = 1 - x/\pi$.

Siden varmestrømmen gjennom endeflatene er 0, og også proporsjonal med u_x slik at $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ for $t > 0$, må vi løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

med (adiabatiske) randbetingelser

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t > 0, \quad (2)$$

og intialbetingelse

$$u(x, 0) = 1 - x/\pi, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

Vi finner først løsninger av (1) på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfylles randbetingelsene (2). Ved innsetting i (1) og divisjon med $F(x)G(t)$ får vi

$$\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F}$$

som må være en konstant k siden venstresiden bare avhenger av t og høyresiden bare avhenger av x . Det gir differensialligningene

$$F'' - kF = 0 \quad \text{og} \quad G' - kG = 0$$

som er oppfylte nøyaktig når $u = F(x)G(t)$ er løsning av (1). Den første ligningen har løsning

$$\begin{aligned} F(x) &= Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} && \text{for } k > 0, k = \mu^2 \\ F(x) &= A + Bx && \text{for } k = 0, \\ F(x) &= A \cos px + B \sin px && \text{for } k < 0, k = -p^2. \end{aligned}$$

Randbetingelsene $F'(0)G(t) = F'(\pi)G(t) = 0$, $t > 0$, gir to muligheter. Enten er $G(t) = 0$ for alle $t > 0$, men den muligheten gir bare løsningen $u(x, t) \equiv 0$, eller så er $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

For $k > 0$ må vi ha $A = B = 0$ for å få $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

For $k = 0$ blir $F'(0) = F'(\pi) = 0$ dersom $B = 0$, A kan være vilkårlig.

For $k < 0$ er $F'(0) = pB = 0$ hvis $B = 0$, og da er $F'(\pi) = pA \sin p\pi = 0$ dersom $p = n = 1, 2, 3, \dots$ (og A vilkårlig). Med $A = 1$ får vi

$$\left. \begin{aligned} k = 0 : & \quad F(x) = 1 \\ k = -n^2 : & \quad F(x) = \cos nx \end{aligned} \right\} \quad \text{dvs. } k = -n^2 : F(x) = \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ligningen $G' - kG = 0$, $k = -n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ har løsning $G(t) = Ae^{-n^2 t}$ så funksjonene av formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som passer i (1) og oppfylles randbetingelsene (2) blir derfor

$$u_n(x, t) = A_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Siden (1) er lineær og homogen, er summen

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

også løsning av (1) hvis rekken konvergerer og er leddvis deriverbar mhp. t og to ganger leddvis deriverbar mhp. x , randbetingelsene (2) er også oppfylt. Vi bestemmer koeffisientene A_n for $n = 0, 1, 2, \dots$ slik at initialbetingelsen (3) også blir oppfylt:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

Vi ser at A_n må være a_n -koeffisienten i Fouriercosinusrekka for $f(x) = 1 - x/\pi$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Av formelene i Rottmann side 175 får vi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) dx = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \frac{\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{\pi n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} 4/(n^2 \pi^2) & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases} \end{aligned}$$

Svaret blir altså

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(e^{-t} \cos x + \frac{1}{9} e^{-9t} \cos 3x + \frac{1}{25} e^{-25t} \cos 5x + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 t} \cos (2m-1)x. \end{aligned}$$

17 Oppgåva er eit spesialtilfelle av det problemet som blir gjennomgått i læreboka på sidene 606–607, med $a = b = 24$, $f(x) = 20$. Vi får derfor løysing

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{24} \sinh \frac{n\pi y}{24},$$

der

$$A_n^* = \frac{2}{24 \sinh n\pi} \int_0^{24} 20 \sin \frac{n\pi x}{24} \, dx.$$

Vi finn at

$$I_n = \int_0^{24} \sin \frac{n\pi x}{24} \, dx = -\frac{24}{\pi n} \left[\cos \frac{n\pi x}{24} \right]_0^{24} = \frac{24}{\pi n} [1 - \cos n\pi] = \frac{24}{\pi n} [1 - (-1)^n].$$

Dette gir $I_{2m} = 0$, $I_{2m+1} = \frac{48}{\pi(2m+1)}$, og dermed

$$\begin{aligned} A_{2m}^* &= 0, \\ A_{2m+1}^* &= \frac{48 \cdot 2 \cdot 20}{\pi(2m+1) \cdot 24 \sinh(2m+1)\pi} = \frac{80}{\pi(2m+1) \sinh(2m+1)\pi} \end{aligned}$$

Løysinga blir då

$$u(x, y) = \frac{80}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{(2m+1)\pi x}{24} \right) \sinh \left(\frac{(2m+1)\pi y}{24} \right)}{(2m+1) \sinh(2m+1)\pi}.$$

- 19 Vi skal finne temperaturfordelingen u i en kvadratisk plate med sider a . Fordelingen er generelt en funksjon av tiden, men vi antar stasjonære forhold og skriver $u = u(x, y)$. Randbetingelsene er at øvre og nedre kant er isolert, dvs.

$$u_y(x, 0) = u_y(x, a) = 0,$$

og at temperaturen langs venstre og høyre kant holdes konstant lik henholdsvis 0 og $f(y)$, dvs.

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ u(a, y) &= f(y). \end{aligned}$$

Temperaturfordelinger oppfyller Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$, alternativt

$$u_{xx} = -u_{yy}.$$

Prosedyren er som vanlig for partielle differensialligninger. Vi begynner med å anta at løsningen er separabel, dvs. $u(x, y) = F(x)G(y)$. Innsatt i Laplace-ligningen:

$$\begin{aligned} F_{xx}G &= -FG_{yy} \\ \frac{F_{xx}}{F} &= -\frac{G_{yy}}{G} = k, \end{aligned}$$

der k er en konstant, uavhengig av x og y . Vi får herav to dekkoblede ligninger:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= kF \\ G_{yy} &= -kG. \end{aligned}$$

Vi må anta noe om verdien til konstanten k (alt vi vet er at den må være reell, da u og dens deriverte representerer fysiske størrelser); løsningene har forskjellige matematisk karakter ettersom den er > 0 , < 0 eller $= 0$. En gal antagelse vil kun gi oss trivielle løsninger, og ofte er det nødvendig å eksperimentere litt her. Den lureste antagelsen her viser i vårt tilfelle å være $k = q^2 > 0$. Ligningen for F blir da $F_{xx} = q^2 F$ med kjent løsning

$$F(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}.$$

Randkravet $u(0, y) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$ medfører at $A = -B$, og vi skriver

$$F(x) = A \sinh qx.$$

Med $k > 0$ blir ligningen for G lik $G_{yy} = -q^2 G$, med kjent løsning:

$$\begin{aligned} G(y) &= C \cos qy + D \sin qy \\ G_y(y) &= -qC \sin qy + qD \cos qy. \end{aligned}$$

Randkravet $u_y(x, 0) = 0 \Rightarrow G_y(0) = 0$ medfører $D = 0$. Videre gir randkravet $u_y(x, a) = 0$ at

$$\sin qa = 0 \Rightarrow qa = n\pi; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Det finnes generelt en løsning av Laplaces ligning som oppfyller de tre første randkravene for hver eneste n . Vi samler derfor konstantene A og C , nummererer dem og skriver

$$u(x, y) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Vi innfører omsider det siste randkravet, $u(a, y) = f(y)$:

$$\begin{aligned} u(a, y) &= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(n\pi) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ &= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = f(y), \end{aligned}$$

der vi har innført den n -avhengige konstanten $E_n^* \equiv E_n \sinh n\pi$ for å gjøre det tydelig at vi her har å gjøre med en Fouriercosinusrekke for en $2a$ -periodisk funksjon $f^*(y)$, som er den like forlengelsen av $f(y)$. Koeffisientene er gitt ved de velkjente formlene for Fourierkoeffisienter:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f^*(y) dy = \frac{1}{a} \int_0^a f(y) dy \\ E_n^* &= E_n \sinh n\pi = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f^*(y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a f(y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy. \end{aligned}$$

En kan om en ønsker sette inn $a = 24$ og samle det hele i ett stort uttrykk for $u(x, y)$. Bedre bruk av tid er det kanskje å bruke noen minutter på å visualisere det fysiske systemet vi har beskrevet. Hvordan endres varmefordelingen i platen når vi endrer $f(y)$, og hvordan skjer dette matematisk?

Fra Kreyszig, avsnitt 12.1

13

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \operatorname{Im} \frac{1}{(x+iy)} = \operatorname{Im} \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

15

$$(1+i)^{16} = ((1+i)^2)^8 = (2i)^8 = 2^8(-1)^4 = 256.$$

Alternativt (utfra avsnitt 12.2)

$$(1+i)^{16} = \sqrt{2}^{16} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{16} = \sqrt{2}^{16} = 256.$$

17

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z^2}{\bar{z}} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{(x+iy)^2}{x-iy} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(x+iy)^3}{(x-iy)(x+iy)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{(x+iy)(x^2+2ixy-y^2)}{x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{x^3-xy^2-2xy^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

oppg. 3 aug 2003 a) For koeffisientene i cosinusrekka får vi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_1^2 dx = \frac{1}{\pi} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_1^2 \cos nx dx = \frac{2 \sin nx}{\pi n} \Big|_1^2 = \frac{2 \sin 2n - \sin n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} \cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekka for vilkårlig x . For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ får vi

$$S(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Dersom $u(x, t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \quad \text{og} \quad G' - kG = 0$$

for en konstant k . Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikke-trivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0, 1, 2, \dots$. For $G(t)$ får vi $G' + n^2 G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x, t) = F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ også en løsning, og den oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx$, og bestemmer koeffisientene A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $A_0 = 1/\pi$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1, 2, \dots$ og følgelig

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} e^{-n^2 t} \cos nx.$$

oppg. 5 aug 2003 La $W(x, s)$ være den Laplacetransformerte av $w(x, t)$, $W(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(x, t) dt$.

Laplacetransformasjon av den gitte ligningen gir

$$\frac{\partial W}{\partial x} + sW - w(x, 0) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{dvs.} \quad \frac{\partial W}{\partial x} + sW = \frac{1}{s^2} \quad (\text{siden } w(x, 0) = 0).$$

Dette er en ordinær differensialligning for $W(x, s)$ betraktet som funksjon av x . Ligningen kan da skrives $dW/dx + sW = 1/s^2$, og ved å bruke løsningen som står i oppgaven får vi

$$W(x, s) = C(s)e^{-sx} + 1/s^3.$$

Vi skal ha $w(0, t) = 0$ og følgelig $W(0, s) = 0$. Siden $W(0, s) = C(s) + 1/s^3$ følger $C(s) = -1/s^3$ og

$$W(x, s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3} e^{-xs}.$$

For å inverstransformere, bruker vi at $F(s) = 1/s^3$ har inverstransformert $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ og skiftteorem 2:

$$w(x, t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(t-x)^2 u(t-x) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{for } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}x(2t-x) & \text{for } t \geq x. \end{cases}$$

oppg. 3 mai 2003 a) Den Fouriertransformerte av $f(x)$ er

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(1+iw)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-(1+iw)x}}{1+iw} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}.$$

(Vi brukte at $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} e^{-iwx} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (\cos wx - i \sin wx) = 0$.)

Siden $\hat{h}(w) = 2\pi \hat{f}(w) \cdot \hat{f}(w)$ følger av konvolusjonsregelen at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{h}(w)\} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} (f * f)(x) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x-p)f(p) dp.$$

Når $p < 0$ er $f(p) = 0$, og når $p > x$, dvs. $x-p < 0$, er $f(x-p) = 0$. Følgelig er $h(x) = \sqrt{2\pi} \int_0^x f(x-p)f(p) dp$. Dermed får vi $h(x) = 0$ når $x < 0$ og

$$h(x) = \sqrt{2\pi} \int_0^x e^{-(x-p)} e^{-p} dp = \sqrt{2\pi} \int_0^x e^{-x} dp = \sqrt{2\pi} e^{-x} p \Big|_{p=0}^x = \sqrt{2\pi} x e^{-x} \quad \text{når } x > 0.$$