TMA4125
Matematikk 4N
våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 9

Fra Kreyszig, avsnitt 11.5

$\boxed{13}$ Vi skal finne temperaturen $u(x,t)$ i en stav ($L = \pi$, $c = 1$) som er helt isolert og har initial temperatur $f(x) = 1 - x/\pi$.

Siden varmestrømmen gjennom endeflatene er 0, og også proporsjonal med u_x slik at $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ for $t > 0$, må vi løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

med (adiabatiske) randbetingelser

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \qquad \text{for } t > 0, \tag{2}$$

og intialbetingelse

$$u(x,0) = 1 - x/\pi, \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{3}$$

Vi finner først løsninger av (1) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene (2). Ved innsetting i (1) og divisjon med $F(x)G(t)$ får vi

$$\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F}$$

som må være en konstant k siden venstresiden bare avhenger av t og høyresiden bare avhenger av x. Det gir differensialligningene

$$F'' - kF = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - kG = 0$$

som er oppfylte nyaktig nr $u = F(x)G(t)$ er lsning av (1). Den første ligningen har løsning

$$\begin{aligned} F(x) &= Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} && \text{for } k > 0,\ k = \mu^2 \\ F(x) &= A + Bx && \text{for } k = 0, \\ F(x) &= A\cos px + B\sin px && \text{for } k < 0,\ k = -p^2. \end{aligned}$$

Randbetingelsene $F'(0)G(t) = F'(\pi)G(t) = 0$, $t > 0$, gir to muligheter. Enten er $G(t) = 0$ for alle $t > 0$, men den muligheten gir bare løsningen $u(x,t) \equiv 0$, eller så er $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

For $k > 0$ må vi ha $A = B = 0$ for å få $F'(0) = F'(\pi) = 0$.
For $k = 0$ blir $F'(0) = F'(\pi) = 0$ dersom $B = 0$, A kan være vilkårlig.

For $k < 0$ er $F'(0) = pB = 0$ hvis $B = 0$, og da er $F'(\pi) = pA\sin p\pi = 0$ dersom $p = n = 1, 2, 3, \ldots$ (og A vilkårlig). Med $A = 1$ får vi

$$\left.\begin{array}{ll} k=0: & F(x)=1 \\ k=-n^2: & F(x)=\cos nx \end{array}\right\} \quad \text{dvs. } k=-n^2 : F(x)=\cos nx,\ n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Ligningen $G' - kG = 0$, $k = -n^2$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ har løsning $G(t) = Ae^{-n^2t}$ så funksjonene av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som passer i (1) og oppfyller randbetingelsene (2) blir derfor

$$u_n(x,t) = A_n e^{-n^2t}\cos nx, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Siden (1) er lineær og homogen, er summen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2t}\cos nx$$

også løsning av (1) hvis rekken konvergerer og er leddvis deriverbar mhp. t og to ganger leddvis deriverbar mhp. x, randbetingelsene (2) er også oppfylt. Vi bestemmer koeffisientene A_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at initialbetingelsen (3) også blir oppfylt:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos nx = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx.$$

Vi ser at A_n må være a_n-koeffisienten i Fouriercosinusrekka for $f(x) = 1 - x/\pi$ på intervallet $0 \le x \le \pi$. Av formlene i Rottmann side 175 får vi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)dx = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{\pi n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 4/(n^2\pi^2) & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases} \end{aligned}$$

Svaret blir altså

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(e^{-t}\cos x + \frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x + \frac{1}{25}e^{-25t}\cos 5x + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}e^{-(2m-1)^2t}\cos(2m-1)x. \end{aligned}$$

$\boxed{17}$ Oppgåva er eit spesialtilfelle av det problemet som blir gjennomgått i læreboka på sidene 606–607, med $a = b = 24$, $f(x) = 20$. Vi får derfor løysing

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi x}{24}\sinh\frac{n\pi y}{24},$$

der

$$A_n^* = \frac{2}{24\sinh n\pi}\int_0^{24} 20\sin\frac{n\pi x}{24}\,dx.$$

Vi finn at

$$I_n = \int_0^{24} \sin\frac{n\pi x}{24}\,dx = -\frac{24}{\pi n}\left[\cos\frac{n\pi x}{24}\right]_0^{24} = \frac{24}{\pi n}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{24}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right].$$

Dette gir $I_{2m} = 0$, $I_{2m+1} = \frac{48}{\pi(2m+1)}$, og dermed

$$\begin{aligned} A^*_{2m} &= 0, \\ A^*_{2m+1} &= \frac{48\cdot 2\cdot 20}{\pi(2m+1)\cdot 24\sinh(2m+1)\pi} = \frac{80}{\pi(2m+1)\sinh(2m+1)\pi} \end{aligned}$$

Løysinga blir då

$$u(x,y) = \frac{80}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{24}\right)\sinh\left(\frac{(2m+1)\pi y}{24}\right)}{(2m+1)\sinh(2m+1)\pi}.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 11.6

$\boxed{3}$ Vi skal finne en løsning på integralform av varmeligningen $u_t = c^2 u_{xx}$ med intialbetingelse $u(x,0) = f(x)$ der $f(x) = 1$ for $|x| < 1$ og $f(x) = 0$ ellers.

Kreyszig 11.6, formel (6):

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}[A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}\,dp.$$

Initialbetingelsen gir

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^{\infty}[A(p)\cos px + B(p)\sin px]\,dp.$$

Ved hjelp av formlene for Fourierintegralet i Kreyszig 10.8 får vi

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos px\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos px\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin p}{p} \\ B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin px\,dx = 0. \end{aligned}$$

Svaret blir altså

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin p}{p}e^{-c^2p^2t}\cos px\,dp.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 11.12

$\boxed{5}$ Vi skal bruke Laplacetransformasjonen til å løse

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt, \quad u(x,0) = 0 \text{ for } x \geq 0, \quad u(0,t) = 0 \text{ for } t \geq 0.$$

La $U(x,s)$ vre den Laplacetransformerte av $u(x,t)$ mhp. t, $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$.

Da er $\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = sU(x,s) - u(x,0)$, og vi har $\mathcal{L}\{u_x(x,t)\} = U_x(x,s)$ ved bytte om rekkeflgen av integrasjon og derivasjon:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}U(x,s).$$

Laplacetransformerer vi den partielle differensialligningen, fr vi

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + sU - u(x,0) = x\frac{1}{s^2} \qquad \text{dvs.} \qquad x\frac{\partial U}{\partial x} + sU = \frac{x}{s^2}.$$

Den eneste deriverte som inngr her, er mhp. x, derfor kan vi se p denne ligningen som en ordinr differensialligning for $U(x,s)$ betraktet som funksjon av x. En lineær differensialligning $y' + p(x)y = q(x)$ kan vi lse ved å multiplisere med en integrerende faktor $F(x) = e^{\int p\,dx}$ (Kreyszig 1.6). Det gir $(Fy)' = Fq$, og ved integrasjon $Fy = \int Fq\,dx + C$.

Det gir her

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{s}{x}U &= \frac{1}{s^2}, \qquad F(x) = e^{\int s/x\,dx} = e^{s\ln x} = x^s && (x>0)\\
x^s\frac{\partial U}{\partial x} + sx^{s-1}U &= \frac{1}{s^2}x^s, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\big(x^sU\big) = \frac{1}{s^2}x^s && (x \ge 0)\\
x^sU(x,s) &= \frac{1}{s^2(s+1)}x^{s+1} + C(s) && (x \ge 0).
\end{aligned}$$

Integrasjons-"konstanten" $C(s)$ bestemmes ved å bruke at $u(0,t) = 0$. Da blir $U(0,s) = \mathcal{L}\{u(0,t)\} = 0$ og følgelig

$$0 \cdot U(0,s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot 0 + C(s), \qquad C(s) = 0, \qquad U(x,s) = \frac{x}{s^2(s+1)}.$$

Til slutt inverstransformerer vi ved f.eks. å bruke delbrøkoppspalting:

$$\begin{aligned}
U(x,s) &= \frac{x}{s^2(s+1)} = x\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right]\\
u(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} = x(t - 1 + e^{-t}).
\end{aligned}$$

Fra SIF5013 august 2003

$\boxed{3}$ **a)** For koefisientene i cosinusrekka får vi

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_1^2 dx = \frac{1}{\pi}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_1^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_1^2 = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2n - \sin n}{n}.
\end{aligned}$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2n - \sin n}{n}\cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekka for vilkårlig x. For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ fr vi

$$S(1) = \frac{f(1+0)+f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - kG = 0$$

for en konstant k. Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. For $G(t)$ får vi $G' + n^2 G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}\cos nx, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\ .$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos nx$, og bestemmer koeffisientene A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) fr vi $A_0 = 1/\pi$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1,\ 2,\ \ldots$ og følgelig

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} e^{-n^2 t}\cos nx.$$

$\boxed{5}$ La $W(x,s)$ være den Laplacetransformerte av $w(x,t)$, $W(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(x,t)\,dt$. Laplacetransformasjon av den gitte ligningen gir

$$\frac{\partial W}{\partial x} + sW - w(x,0) = \frac{1}{s^2}, \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + sW = \frac{1}{s^2} \qquad (\text{siden } w(x,0) = 0).$$

Dette er en ordinær differensialligning for $W(x,s)$ betraktet som funksjon av x. Ligningen kan da skrives $dW/dx + sW = 1/s^2$, og ved å bruke løsningen som står i oppgaven får vi

$$W(x,s) = C(s)e^{-sx} + 1/s^3.$$

Vi skal ha $w(0,t) = 0$ og følgelig $W(0,s) = 0$. Siden $W(0,s) = C(s) + 1/s^3$ følger $C(s) = -1/s^3$ og

$$W(x,s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3}e^{-xs}.$$

For å inverstransformere, bruker vi at $F(s) = 1/s^3$ har inverstransformert $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ og skiftteorem 2:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}(t-x)^2 u(t-x) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{for } 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}x(2t-x) & \text{for } t \ge x. \end{cases}$$

Fra SIF5013 mai 2003

$\boxed{3}$ **a)** Den Fouriertransformerte av $f(x)$ er

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+iw)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-(1+iw)x}}{1+iw} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}.$$

(Vi brukte at $\lim_{x\to\infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{-iwx} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(\cos wx - \sin wx) = 0$.)

Siden $\widehat{h}(w) = 2\pi\,\widehat{f}(w)\cdot\widehat{f}(w)$ følger av konvolusjonsregelen at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{h}(w)\} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\,(f*f)(x) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)f(p)\,dp.$$

Når $p<0$ er $f(p)=0$, og når $p>x$, dvs. $x-p<0$, er $f(x-p)=0$. Følgelig er $h(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^x f(x-p)f(p)\,dp$. Dermed får vi $h(x)=0$ når $x<0$ og

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-(x-p)}e^{-p}\,dp = \sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-x}\,dp = \sqrt{2\pi}\,e^{-x}p\,\Big|_{p=0}^{x} = \sqrt{2\pi}\,xe^{-x} \quad \text{når } x>0.$$