

- 1 Bruk både Eulers metode med steglende $h = 0.1$ og Runge-Kutta-metoden med steglengde $h = 0.2$ til å finne en tilnærming i punktet $t = 0.2$ til løsningen av systemet

$$\begin{aligned}x' &= x - 4y \\ y' &= -x + y\end{aligned}$$

med initialbetingelser $x(0) = 1, y(0) = 0$. Sammenlign med den eksakte løsningen

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \\ y(t) &= \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{3t}).\end{aligned}$$

- 2 Gitt Laplace-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $R = [0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \sin(\pi x), & u(x, 1) &= e^{\pi} \sin(\pi x), & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0, & \text{for } 0 \leq y \leq 1.\end{aligned}$$

- a) Finn den eksakte løsningen til problemet ved separasjon av variable.
b) Sett opp et numerisk skjema basert på sentral differens. Bruk uniformt gitter med steglengde $h = 1/N$ i både x - og y -retningen. Dette gir $N + 1$ gitterpunkter i begge uavhengige variable.
c) La $N = 2$. Da blir det bare én ukjent, $u_{1,1}$. Beregn $u_{1,1}$.

La nå $N = 4$. Da blir det ni ukjente. Sett opp det lineære ligningssystemet. Bruk den eksakte løsningen som startverdi og utfør to iterasjoner med Gauss-Seidels metode for lineære ligningssystemer.

Sammenlign de numeriske løsningene med den eksakte løsningen i punktet $(x, y) = (1/2, 1/2)$ for både $N = 2$ og $N = 4$.

- 3 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller den ordinære differensialligningen

$$x'' = \cos(x) \quad (1)$$

med tilhørende initialbetingelser $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

- a) Innfør passende nye variable og skriv ligningen (1) om til et system av førsteordens differensialligninger.
b) Bruk steglengde $h = 0.1$ og finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to steg med Heuns metode (forbedret Eulers metode).

- 4 Vi skal løse varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$. Randbetingelsene er

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

og initialbetingelsen er

$$u(x, 0) = \cos(\pi(x - \frac{1}{2})), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- a) La $h = 0.1$ være steglengden i x -retning og $k = 0.04$ være steglengden i t -retning. Formuler Eulers metode for dette problemet.
b) Ved å bruke algoritmen i a) fikk vi tabellen under. Finn x, y og z .

t	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
k	0.9133	0.9603	x	0.9133	0.7769
$2k$	0.8771	y	0.8771	0.7769	0.5645
$3k$	0.8423	z	0.8423	0.7165	0.5206