Norwegian University of Science and Technology
Institutt for matematiske fag

Exercise set 10

Exercises from Kreyszig (8th ed):

$\boxed{1}$ *Exercise 5.4.13*

Inverse Transforms by Differentation or Integration. Using the formulas (6) or (1) (p.275-276), find the inverse transform. (Show your work.)

$$\ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$$

$\boxed{2}$ *Exercise 5.5.9*

Calculation of Convolutions by Integrating (1)(p. 279). Do this for the following. (Show the details of your work.)

$$u(t-3) * e^{-2t}$$

$\boxed{3}$ *Exercise 5.5.15*

Inverse Transforms by Convolution. Find $h(t)$ by the convolution theorem from the given $H(s) = \mathcal{L}(h)$. (Show the details of your work.)

$$\frac{s}{(s^2+\pi^2)^2}$$

$\boxed{4}$ *Exercise 5.5.29*

Integral equations. Using Laplace transform, solve the following integral equation. (Show the details of your work.)

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

$\boxed{5}$ *Exercise 5.6.6*

Inverse Transforms. Find the function $f(t)$ for a given transform $\mathcal{L}(f)$ by partial fraction reduction or any other method that you think is simplest or fastest. Indicate the method used and show the details of your work.

$$\frac{s^3-3s^2+6s-4}{(s^2+2s+2)^2}$$

$\boxed{6}$ *Exercise 5.6.11*

Inverse Transforms. Derive the following formula, showing the details of your work.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2a^2}\sinh at \sin at$$

$\boxed{7}$ *Exercise 17.5.3*

(Trapeziodal rule) To get a feeling for the increase in accuracy, integrate x^2 from 0 to 1 by (2)(p. 870) with $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$.

$\boxed{8}$ *Exercise 17.5.14*

(Error bounds and estimate) Integrate e^{-x} from 0 to 2 by (7)(p. 873) with $h = 1$ and with $h = 0.5$. Give error bounds for the $h = 0.5$ value by (9)(p. 874) and an error estimate by (10)(p. 875).

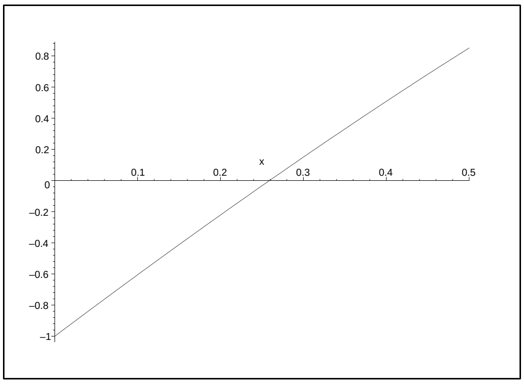
Non-Kreyszig exercises:

$\boxed{9}$ I denne oppgaven skal du finne en tilnærmelse til løsningen av en ikke-lineær ligning vha. *invers* interpolasjon.

Gitt ligningen

$$f(x) = 5x - e^x = 0.$$

En skisse av f viser at ligningen har en løsning mellom 0.2 og 0.3.



Velg x-nodene 0.2, 0.25 og 0.3. Regn ut de korresponderende verdiene $y_i = f(x_i)$, og finn verdien av interpolasjonspolynomet $x = p_2(y)$ i punktet $y = 0$.

Dette er en tilnærmelse til løsningen av ligningen $5x - e^x = 0$. Hvorfor?

Til sammenligning er den eksakte løsningen $x = 0.259171$.

Hint: Siden du bare vil regne ut en enkelt verdi av interpolasjonspolynomet, skriv det opp så enkelt du kan, og ikke bruk tid på å manipulere polynomet for å få det på en pen form.

$\boxed{10}$ La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, og la $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

a) Gitt nodene $x_0 = -0.8660$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.8660$. Finn interpolasjonspolynomet $p_2(x)$ til datasettet $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (bruk den metoden du vil).

Finn tilnærmelsen J til integralet I

$$J = \int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx,$$

og beregn feilen $|I - J|$.

I det neste punktet skal vi bruke Simpsons metode S_{2m} på $2m$ intervall til å approksimere integralet $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ fra punkt a).

b) Beregn S_{2m} for $m = 1$, og feilen $|I - S_2|$.

Kan du tenke deg en grunn til at metoden i punkt a) er bedre enn Simpsons metode med like mange noder?

Bruk feilformelen for Simpsons metode og finn hvor mange intervall $2m$ man må bruke i approksimasjonen av $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ for at feilen skal bli mindre enn feilen i punkt a)(≈ 0.05). (En kan anta at $|f^{(4)}(x)| \leq 25$.)