Norwegian University of Science and Technology
Institutt for matematiske fag

TMA4123 Matematikk 4M
Vår 2007

Exercise set 10

Exercises from Kreyszig (8th ed):

$\boxed{1}$ *Exercise 17.5.3*

(Trapeziodal rule) To get a feeling for the increase in accuracy, integrate x^2 from 0 to 1 by (2)(p. 870) with $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$.

$\boxed{2}$ *Exercise 17.5.14*

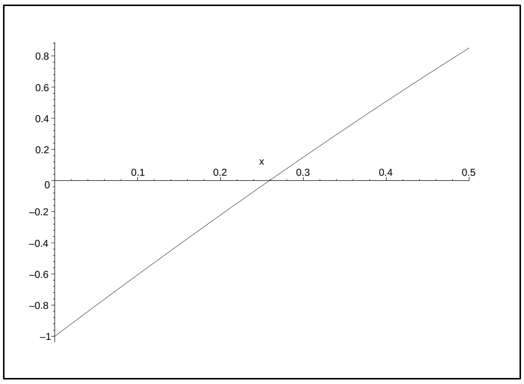
(Error bounds and estimate) Integrate e^{-x} from 0 to 2 by (7)(p. 873) with $h = 1$ and with $h = 0.5$. Give error bounds for the $h = 0.5$ value by (9)(p. 874) and an error estimate by (10)(p. 875).

Non-Kreyszig exercises:

$\boxed{3}$ I denne oppgaven skal du finne en tilnærmelse til løsningen av en ikke-lineær ligning vha. *invers* interpolasjon.

Gitt ligningen
$$f(x) = 5x - e^x = 0.$$

En skisse av f viser at ligningen har en løsning mellom 0.2 og 0.3.



Velg x-nodene 0.2, 0.25 og 0.3. Regn ut de korresponderende verdiene $y_i = f(x_i)$, og finn verdien av interpolasjonspolynomet $x = p_2(y)$ i punktet $y = 0$.

Dette er en tilnærmelse til løsningen av ligningen $5x - e^x = 0$. Hvorfor?

Til sammenligning er den eksakte løsningen $x = 0.259171$.

Hint: Siden du bare vil regne ut en enkelt verdi av interpolasjonspolynomet, skriv det opp så enkelt du kan, og ikke bruk tid på å manipulere polynomet for å få det på en pen form.

$\boxed{4}$ La $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, og la $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

a) Gitt nodene $x_0 = -0.8660$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.8660$. Finn interpolasjonspolynomet $p_2(x)$ til datasettet $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (bruk den metoden du vil).

Finn tilnærmelsen J til integralet I

$$J = \int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx,$$

og beregn feilen $|I - J|$.

I det neste punktet skal vi bruke Simpsons metode S_{2m} på $2m$ intervall til å approksimere integralet $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ fra punkt a).

b) Beregn S_{2m} for $m = 1$, og feilen $|I - S_2|$.

Kan du tenke deg en grunn til at metoden i punkt a) er bedre enn Simpsons metode med like mange noder?

Bruk feilformelen for Simpsons metode og finn hvor mange intervall $2m$ man må bruke i approksimasjonen av $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ for at feilen skal bli mindre enn feilen i punkt a)(≈ 0.05). (En kan anta at $|f^{(4)}(x)| \leq 25$.)

$\boxed{5}$ *Mai 1999, Oppgave 1*

a) La $f(x) = L - x$ for $0 \leq x \leq L$. Skisser de like (f_e) og odde (f_o) utvidelsene av f (med periode $2L$) på intervallet $[-2L, 2L]$, og vis at fourierrekka til f_e er

$$\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(\pi n x/L)}{n^2}.$$

b) Finn summen av

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \dots.$$

c) Finn alle løsningene $u(x,t) = X(x)T(t)$ av ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \leq x \leq 2$, $t > 0$, der $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0$.

d) Bestem løsningene av problemet i (c) når

1. $u(x,0) = 4 + 2\cos\frac{3\pi x}{2}$, $0 \leq x \leq 2$,
2. $u(x,0) = 2 - x$, $0 \leq x \leq 2$.