Norwegian University of Science and Technology
Institutt for matematiske fag

TMA4123/TMA4125
Matematikk 4M/N
Vår 2007

Exercise set 12

1 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller den ordinære differensialligningen

$$x'' = \cos(x) \tag{1}$$

med tilhørende initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

a) Innfør passende nye variable og skriv ligningen (1) om til et system av førsteordens differensialligninger.

b) Bruk steglengde $h = 0.1$ og finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to steg med Heuns metode (2. ordens Runge-Kutta metode).

2 Bruk både Eulers metode med steglende $h = 0.1$ og Heuns metode med steglengde $h = 0.2$ til å finne en tilnærmelse i punktet $t = 0.2$ til løsningen av systemet

$$x' = x - 4y$$
$$y' = -x + y$$

med initialbetingelser $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Sammenlign med den eksakte løsningen

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{3t}\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-t} - e^{3t}\right).$$

3 Gitt Laplace-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $R = [0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(x,1) = e^{\pi}\sin(\pi x), \quad \text{for } 0 \le x \le 1$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad \text{for } 0 \le y \le 1.$$

a) Finn den eksakte løsningen til problemet ved separasjon av variable.

b) Sett opp et numerisk skjema basert på sentral differens. Bruk uniformt gitter med steglengde $h = 1/N$ i både x- og y-retningen. Dette gir $N+1$ gitterpunkter i begge uavhengige variable.

c) La $N = 2$. Da blir det bare én ukjent, $u_{1,1}$. Beregn $u_{1,1}$.
La nå $N = 4$. Da blir det ni ukjente. Sett opp det lineære ligningssystemet. Bruk den eksakte løsningen som startverdi og utfør to iterasjoner med Gauss-Seidels metode for lineære ligningssystemer.
Sammenlign de numeriske løsningene med den eksakte løsningen i punktet $(x, y) = (1/2, 1/2)$ for både $N = 2$ og $N = 4$.

4 Vi skal se på iterative metoder for å løse systemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Utfør to iterasjoner med Jacobimetoden.

b) Utfør to iterasjoner med Gauss-Seidel-metoden.

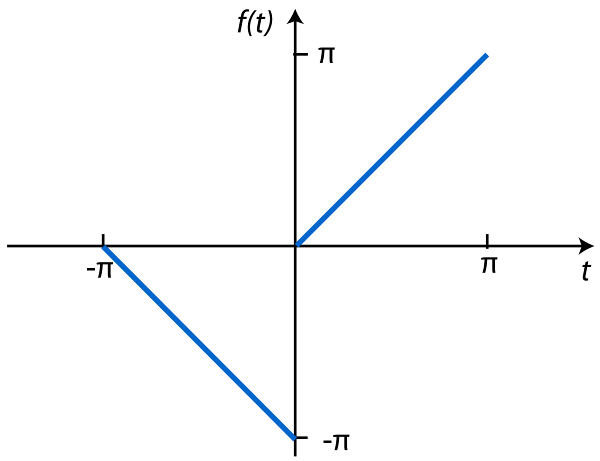
c) Skriv iterasjonene i formen:

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + g,$$

bevis konvergens for begge metodene ved å beregne $\|C\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$.
Hint: Inversen til en nedretriangulær matrise med konstante diagonaler er også nedretriangulær med konstante diagonaler.

5 *SIF5016 Desember 1999, Oppgave 1*

a) Finn Fourierrekka til en 2π-periodisk funksjon $f(t)$ når grafen til f for $-\pi \leq t \leq \pi$ er:



b) Hva er summen av Fourierrekka til funksjonen $f(t)$ i **a)** for $t = 0$ og for $t = \pi$? Finn en formel for summen av Fourierrekka på intervallet $\pi < t < 2\pi$.