Norwegian University of Science and Technology
Institutt for matematiske fag

TMA4123/TMA4125
Matematikk 4M/N
Vår 2007

**Exercise set 13**

$\boxed{1}$ Betrakt den én-dimensjonale varmeledningsligningen

$$u_t = u_{xx}$$

på området $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ med startbetingelse

$$u(x,0) = x(2-x); \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

og randbetingelser

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad \text{for } t \geq 0.$$

**a)** Anvend den eksplisitte metoden på dette problemet. Ta to skritt med $h = 0.25$ og $k = 0.1$.

**b)** Anvend Crank-Nicolson på på samme problemet. Ta to skritt med samme $h$ og $k$ som i punkt **a)**.

**c)** Sett opp en eksplisitt metode, med generelt valg av $k$ og $h$, for ligningen

$$u_t = u_{xx} + xu_x.$$

Bruk samme start- og randbetingelser som i sted.

$\boxed{2}$ Gitt den partielle differensialligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $[0,9] \times [0,9]$ og tilhørende randbetingelser

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, & u(x,9) &= 90, & &\text{for } 0 \leq x \leq 9, \\ u(0,y) &= 10y, & u(9,y) &= 10y, & &\text{for } 0 \leq y \leq 9. \end{aligned}$$

**a)** Bruk skrittlengde $h = 3$ i både $x$- og $y$-retning og sett opp differenseligningen for $u_{ij}$ i hvert av de fire indre punktene.

**b)** Gjør én iterasjon med Jacobis metode på det lineære ligningssystemet fra **a)**. Bruk $u_{ij} = 0$ som startverdier for alle de indre punktene.

$\boxed{3}$ La $y = y(x)$ være den funksjonen som tilfredsstiller den andreordens ordinære differensialligningen

$$y'' - (1-y^2)y' + y = 0 \tag{1}$$

med tilhørende initialbetingelser $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

**a)** Skriv om ligningen (1) til et system av to førsteordens ordinære differensialligninger. Hva blir initialbetingelsene for dette systemet?

**b)** Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

numerisk. $Y$ er her en kolonnevektor av løsningskomponenter. I forelesningene har vi blant annet studert Eulers metode for dette problemet. En annen metode, kjent som "Baklengs Euler", er definert ved at

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1}) \tag{2}$$

der $h$ betegner skrittlengden, og vi har brukt $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at vi kjenner den numeriske løsningen $Y_n$ på skritt $n$, og metoden (2) brukes til å definere den numeriske løsningen $Y_{n+1}$ på skritt $n+1$. Metoden (2) er *implisitt* idet den evaluerer høyresiden $F$ i det *ukjente* punktet $Y_{n+1}$. Vi må derfor generelt løse et ikke-lineært ligningssystem for hvert skritt for å finne tilnærmelsene $Y_n$ når $n > 0$.

La $y_{i,n}$ for $i = 1, 2$ betegne komponent i av den numeriske løsningen på skritt $n$. Bruk $h = 0.1$ og skriv opp det ikke-lineære ligningssystemet for $Y_1$ basert på "Baklengs Euler" for systemet du utledet i **a)**. Bruk de kjente initialbetingelsene $Y_0$ der du kan.

**c)** Gjør én iterasjon med Newtons metode på det ikke-lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $y_1 = 2$ og $y_2 = 0$ som startverdier.

$\boxed{4}$ **a)** Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Tegn 2 perioder (fra $-2\pi$ til $2\pi$) av grafen til den jevne, $2\pi$-periodiske utvidelsen av $f(x)$, og finn Fouriercosinusrekka til $f(x)$.

**b)** Gitt en partiell differensialligning (3) med randbetingelser (4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3}$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad \text{og} \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t > 0. \tag{4}$$

Finn alle løsninger av (3) på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (4).

**c)** Finn en (formell) løsning av (3) som, i tillegg til (4), oppfyller initialbetingelsen

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{for } 0 \le x \le \pi,$$

der $f(x)$ er funksjonen gitt i **a)**.

Finn også en løsning av (3) som oppfyller (4) og initialbetingelsen

$$u(x, 0) = 2\cos x \cdot \cos 2x.$$

$\boxed{5}$ **a)** Det oppgis at den $2\pi$-periodiske funksjonen $f(x)$, som for $-\pi < x < \pi$ er gitt ved $f(x) = e^x$, har Fourierrekke

$$\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]. \tag{5}$$

Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

**b)** Det oppgis at den Fouriertransformerte $\hat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ av

$$f(x) = \begin{cases}\cos x & \text{for } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{ellers}\end{cases} \quad \text{er} \quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}.$$

Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å finne verdien av integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw.$$

$\boxed{6}$ Gitt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{7}$$

**a)** Avgjør (ved innsetting) hvilke(n) av følgende funksjoner som oppfyller (6), (7)

$$\begin{array}{ll} u(x,y) = y, & u(x,y) = \sin nx \sinh ny, \\ u(x,y) = xy, & u(x,y) = \cos nx \sinh ny. \end{array} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

og

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < \pi. \tag{8}$$

Finn en funksjon $u(x,y)$ som oppfyller (6), (7), (8) og

$$u(x,\pi) = 1 - \cos 2x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

**b)** Finn alle funksjoner på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (6), (7) og

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < \pi.$$

$\boxed{7}$ Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \le x \le \pi$ har Fouriersinusrekke

$$-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}. \tag{9}$$

Skisser grafen til summen av rekka (9) for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Bruk (9) til å finne summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

$\boxed{8}$ Bruk Fouriertransformasjon til å finne $f(x)$ når

$$f(x) = e^{-|x|} - 4\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-|x-p|}\,dp.$$

Oppgitt Fouriertransformert:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2} \quad (a > 0)$$