Norwegian University of Science and Technology
Institutt for matematiske fag

Exercise set 8

Eksamensoppgaver:

$\boxed{1}$ *3, SIF 5013, Mai 2002*

a) Funksjonen $f(x)$ er gitt for $0 < x < \pi$ ved

$$f(x) = \frac{x}{2}\cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

Finn sinusrekka til $f(x)$ når det oppgis at for $n \neq 1$ er b_n gitt ved

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n^2-1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

(Hint for å beregne b_1: $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.)

b) Gitt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{for } 0 < x < \pi,\ t > 0 \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t > 0. \tag{2}$$

Vis at metoden med separasjon av variable (produktmetoden) fører til løsninger av formen $u_n(x,t) = G_n(t)\sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, der $G_n(t)$ er løsning av differensialligningen

$$G'' + 2G' + n^2 G = 0.$$

Bestem $G_n(t)$ for $n = 1$ og for $n > 1$.

c) Finn en rekkeutvikling for en løsning $u(x,t)$ av (1) som oppfyller (2) og initialbetingelsene

$$u(x,0) = \frac{x}{2}\cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

$\boxed{2}$ *4, TMA4130 Nov, 2005*

Finn den Fouriertransformerte $\hat{f}(\omega)$ av funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2e}.$$

$\boxed{3}$ *3, SIF 5013/16 August 2002*

I området $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ er det gitt et randverdiproblem

$$u_{xx} = u_{tt} - u \tag{3}$$
$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \tag{4}$$

a) Bestem alle funksjoner av typen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (3) og (4).

b) Skriv opp alle løsninger av (3) og (4) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = 1 + \cos \pi x, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$