**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Xavier Raynaud: tlf. 73 59 35 46

# EKSAMEN I MATEMATIKK 4M (TMA4123)

Bokmål
Onsdag 21. mai 2008
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 11.06.2007

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1** Funksjonen $f$ er gitt på intervallet $0 < x < 1$ ved

$$f(x) = x$$

La $g$ være den like (jevne) periodiske utvidelsen av $f$ med periode 2, og la $h$ være den odde, periodiske utvidelsen av $f$ med periode 2.

**a)** Skisser grafene til $g$ og $h$ for $-2 < x < 2$. Beregn (Fourier-)sinusrekken til $f$. Hva er summene av cosinusrekken og sinusrekken i punktet $x = 1$?

**b)** Vis at (Fourier-)cosinusrekken til $f$ er lik

$$(*) \qquad \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x)$$

Bruk $(*)$ til å finne summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots .$$

**Oppgave 2**

**a)** Funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller ligningen

(1) $$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{for} \;\; 0 < x < \pi, t > 0$$

og randbetingelsene

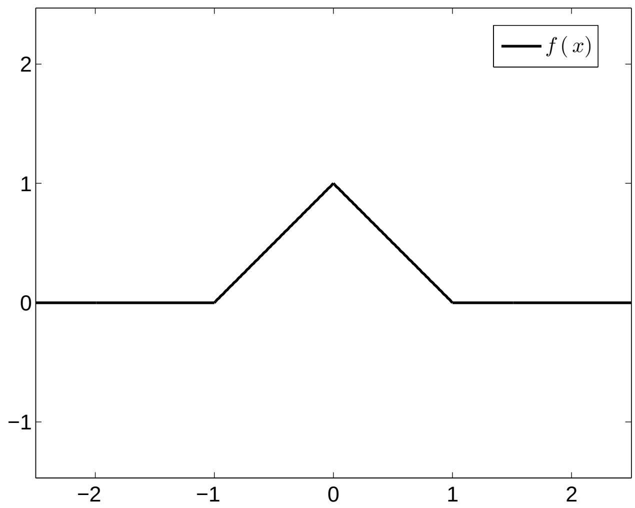
(2) $$u_x(0,t) = 0,\;\; u_x(\pi,t) = 0.$$

Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller disse kravene.

**b)** Vis at ligningen (1) sammen med randbetingelsene (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet. Finn løsningen til (1) og (2) som i tillegg tilfredstiller startbetingelsene

$$u(x,0) = \cos^2(x),\;\; u_t(x,0) = \cos(3x)$$

**Oppgave 3** Regn ut direkte Fouriertransformen til funksjonen $f$ som er tegnet under.




Det er gitt at Fouriertransformen til funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er

$$\hat{g}(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{w}{2})}{w}.$$

Regn ut Fouriertransformen til $f$ ved å bruke at $f = g \star g$.

**Oppgave 4**

**a)** Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x\,u(x,y)$$

på firkanten $[0,1] \times [0,1]$ med randbetingelser

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x,\ \ u(x,1) = x \text{ for } 0 \le x \le 1,\\ &u(0,y) = 0,\ \text{ for } 0 \le y \le 1,\\ &u(1,y) = 1,\ \text{ for } 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

La $h = \frac{1}{3}$ være skrittlengden for det gitteret som er gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, \ldots, 3$. Sett opp et system av ligninger for $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{1,2}$ og $u_{2,2}$, der $u_{i,j}$ er en tilnærmelse av $u(x_i, y_j)$.

**b)** Utfør ett steg med Gauss-Seidel iterasjon på systemet

$$\begin{pmatrix} -109 & 27 & 27 & 0 \\ 27 & -110 & 0 & 27 \\ 27 & 0 & -109 & 27 \\ 0 & 27 & 27 & -110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -45 \\ -9 \\ -45 \end{pmatrix}$$

ved å begynne i punktet $(1,1,1,1)^T$. Bruk 4 siffers nøyaktighet.

## Oppgave 5

**a)** La $P$ være det interpolasjonspolynomet med laveste grad for følgende punkt

| $x_k$ | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_k)$ | 1 | 2.25 | 5 | 10.75 | 21 |

Finn $P$.

**b)** Bruk Simpsons regel med $\Delta x = 0.25$ og regn ut

$$\int_0^1 P(x)\,dx.$$

Kommenter svaret.

## Oppgave 6

Den eksplisitte numeriske metoden for å løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx}$$

er implementert i matlab-koden som følger. Forklar metoden og hvordan den er implementert. Hva er startbetingelsene og randbetingelsene som er brukt i denne matlab-koden?

```
N=10;
M=300;
T=1;
h=1/N;
k=T/M;
r=k/(h^2);

A=zeros(N-1);

for i=1:(N-1)
  A(i,i)=1-2*r;
  if i<N-1
    A(i+1,i)=r;
    A(i,i+1)=r;
  end
end

x=[h:h:1-h]';
u0=cos(pi/2*x);

b=zeros(N-1,1);
b(1)=r*1;

u(:,1)=u0;
for j=1:M
  u(:,j+1)=A*u(:,j)+b;
end
```

# Tabell over Laplacetransformerte

| $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $e^{at} \cos \omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| $e^{at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |

# Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at $x$ og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left( \frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\, \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h\, \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$